ДЖ.П.КОКС

Теория звездных пульсаций

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

John P. Cox

THEORY OF STELLAR PULSATION

Princeton University Press
Princeton, New Jersey
1980

ДЖ. П. КОКС

Теория звездных пульсаций

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
КАНДИДАТА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
А.А.Памятных

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
КАНДИДАТА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
Д.К.Надёжина

МОСКВА «МИР» 1983

ББК 22.66
К 55
УДК 550.4

Кокс Дж. П.

К 55 Теория звездных пульсаций: Пер. с англ. — М.: «Мир», 1983, 328 с., ил.

В монографии профессора астрофизики Колорадского университета (США) собраны современные данные о звездных пульсациях как наблюдательные, так и теоретические. Последовательно рассмотрены радиальные (линейные адиабатические и неадиабатические, нелинейные неадиабатические) и нерадиальные колебания звезд. Книга снабжена обширной библиографией.

Для астрономов, физиков, геофизиков, математиков и механиков, занимающихся теорией колебаний, специалистов и студентов старших курсов.

К $\frac{1705040000\text{-}317}{041(01) - 83}$ 70 — 83 ч.1

ББК 22.66
52

Редакция литературы по космическим исследованиям, астрономии и геофизике

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Пульсирующие звезды образуют многочисленный и удивительно разнообразный по своим характеристикам подкласс физических переменных звезд. Периодические изменения их блеска и других свойств вызваны не внешними причинами (например, затмениями в двойной звездной системе), а попеременным расширением и сжатием звезды. К пульсирующим относятся звезды типа δ Цефея, RR Лиры, W Девы, Миры Кита, RV Тельца, δ Щита и др. Сильно различаясь по свойствам, эти объекты сходны в том, что все они находятся на стадиях эволюции, когда гидростатическое равновесие звезды как целого оказывается неустойчивым по отношению к возбуждению пульсаций. Период пульсаций, амплитуда и форма кривых блеска и лучевых скоростей в принципе содержат важную информацию о внутреннем строении пульсирующих звезд. Но чтобы воспользоваться этой информацией, необходимо располагать хорошо развитой теорией звездных пульсаций.

Книга Джона П. Кокса — профессора астрофизики Колорадского университета (США), уже более четверти века успешно работающего над развитием теории звездных пульсаций, представляет собой четвертую в мировой литературе монографию по теории колебаний звезд, если помимо классической книги С. Росселанда (1949 г.) и появившейся недавно (1979 г.) книги японских авторов по нерадиальным колебаниям звезд принять во внимание также энциклопедическую статью П. Леду и Т. Вальравена (1958 г). В своем предисловии автор справедливо отмечает явный дефицит в литературе по теории физических переменных звезд. В связи с этим мы ниже остановимся несколько подробнее на развитии наших представлений о звездных пульсациях.

Своевременность и важность перевода книги Дж. П. Кокса следует из того, что на русский язык из упомянутых четырех публикаций была переведена лишь книга Росселанда, отражающая начальный этап развития теории тридцатилетней давности. Тогда еще не был найден конкретный механизм возбуждения колебаний звезды. Однако уже через несколько лет С. А. Жевакин показал, что первостепенную роль в возбуждении пульсаций играет расположенная во внешних слоях звезды зона второй ионизации гелия. С этого момента теория поднялась на более высокую ступень развития, чему во многом способствовали также последующие работы В. И. Алешина, Р. Кристи и автора настоящей книги. Одновременно значительно расширились и детализировались наблюдения физических переменных звезд.

К настоящему времени теория звездных пульсаций уже достаточно созрела и способна не только объяснить имеющиеся данные, но и определять программу дальнейших целенаправленных наблюдений пульсирующих звезд. Однако такой прогресс в нашем понимании физических переменных звезд основан на кропотливом труде и энтузиазме многих поколений астрономов и астрофизиков. В связи с этим отметим, что на последнюю четверть XX в. приходится ряд памятных дат, относящихся к наблюдениям и теории пульсирующих звезд. Почти 400 лет назад (1596 г.) немецкий астроном Давид Фабрициус заметил, что блеск звезды в созвездии Кита, относительно которой он измерял положение наблюдавшегося им Меркурия, изменяется со временем. Эта звезда, на-

званная впоследствии Я. Гевелием Мирой (или Удивительной) Кита, оказалась типичным представителем целой группы долгопериодических пульсирующих звезд-гигантов. Около двухсот лет прошло с момента обнаружения (1784 г.) английским астрономом Джоном Гудрайком переменности блеска δ Цефея. Примерно 100 лет назад (в 1879 г.) немецкий физик А. Риттер положил начало теории звездных пульсаций. Он вывел выражение для частоты радиальных колебаний однородной звезды и установил обратную пропорциональность периода колебаний квадратному корню из средней плотности. Затем наблюдения А. А. Белопольского в Пулково (1894 г.) показали, что лучевая скорость δ Цефея изменяется с таким же периодом, как и блеск этой звезды. Еще через два года русский физик Н. А. Умов на защите диссертации Белопольским высказывает мысль о том, что эти наблюдения, возможно, свидетельствуют о пульсациях δ Цефея. Существование пульсирующих звезд стало общепризнанным после установления в 1908 г. Генриеттой Ливитт знаменитого, легшего в основу измерения межгалактических расстояний соотношения период — светимость, появления статьи Х. Шепли (1914 г.), в которой была продемонстрирована несостоятельность интерпретации цефеид как двойных звезд, и разработки А. Эддингтоном в 1918 — 1926 гг. основ теории звездных пульсаций.

В нашей стране, начиная с работ А. А. Белопольского (1854 — 1934), С. П. Глазенапа (1948 — 1937) и С. Н. Блажко (1870 — 1957), переменным звездам всегда уделялось большое внимание. Особенно значительный вклад в изучение переменных звезд вообще и, в частности, пульсирующих звезд внесли Б. В. Кукаркин (1909 — 1977), П. П. Паренаго (1906 — 1960) и В. П. Цесевич, а также их многочисленные ученики и сотрудники. Некоторым итогом этих исследований можно считать серию монографий [1 — 5]*, в которых систематизированы и проанализированы обширные данные о различных типах переменных звезд.

Далеко не так широко представлена в отечественной астрофизической литературе теория колебаний звезд. В историческом плане поучительна дискуссия о причинах звездных пульсаций, развернувшаяся на Четвертом совещании по вопросам космологии (Москва, октябрь 1954 г.) [6]. Следует отметить также симпозиум по проблеме «Звездная эволюция и переменные звезды» (Москва, ноябрь 1964 г.), на котором специальное внимание было обращено на важную для выяснения природы физической переменности связь между эволюцией и устойчивостью звезд по отношению к пульсациям [7]. Небольшая, но насыщенная идеями статья С. А. Жевакина опубликована в книге [4]. Некоторые важные теоретические вопросы обсуждаются также в отдельных главах книг [8, 9]. Вот, пожалуй, и весь перечень публикаций (помимо статей в специальных научных журналах) по теории колебаний звезд. Поэтому нет сомнений, что книга Дж. П. Кокса восполнит существующий досадный пробел.

Книга состоит из трех основных частей: описания общих принципов (ч. I), изложения теории радиальных пульсаций (ч. II) и основ теории нерадиальных колебаний звезд (ч. III). Помимо тщательного рассмотрения линейных адиабатических колебаний звезд, базирующегося на анализе уравнения типа Штурма — Лиувилля, значительное внимание уделяется влиянию неадиабатичности, проблеме сдвига фаз между кривыми блеска и лучевых скоростей пульсирующих звезд и критерию устойчивости звезд по отношению к пульсациям. Хотелось бы отметить гл. 13, в которой на простых моделях демонстрируется специфика пульсационной неустойчивости звезд и возникновения их установившихся колебаний (предельного цикла). Для специалистов по теории колебаний, интересующихся приложениями, эта глава может служить хорошим введением в удивительный мир звездных пульсаций.

Часть III является введением в теорию нерадиальных колебаний звезд, которая по-

* См. список литературы в конце предисловия.

лучила за последние годы сильный стимул к развитию благодаря открытию колебаний Солнца с периодами от 5 до 160 мин и чрезвычайно малой (по сравнению с обычными пульсирующими звездами) амплитуды. Дж. П. Кокс знакомит читателя с основами теории: с выводом уравнений малых нерадиальных колебаний, с классификацией колебаний на p-, f- и g-моды и с результатами расчетов периодов и собственных функций для нерадиальных колебаний политропных газовых шаров. Кроме того, обсуждаются различные вопросы теории, требующие дальнейшего развития (возбуждение и затухание отдельных мод, эффекты неадиабатичности и переменности химического состава и т.д.). В качестве дополнения к данной части книги Дж. П. Кокса можно рекомендовать обзор [10].

В последней гл. 19 кратко обсуждаются еще не решенные до конца, но важные для приложений вопросы, такие, как влияние на пульсации вращения звезды (см. также [10]), магнитных полей, конвекции, эффектов общей теории относительности и отсутствия теплового равновесия.

За прошедшие после английского издания книги Дж. П. Кокса три года не появилось новых книг или обзоров. Однако продолжали выходить статьи в научных журналах, и состоялись два организованных Международным астрономическим союзом коллоквиума: № 58 «Звездная гидродинамика» (Лос-Аламос, США, август 1980 г.) и № 66 «Проблемы колебаний Солнца и звезд» (Крымская астрофизическая обсерватория, СССР, сентябрь 1981 г.). Труды коллоквиума № 58, на котором было уделено внимание и звездным пульсациям, уже опубликованы [11], а труды коллоквиума № 66 должны появиться в одном из ближайших номеров международного журнала *Solar Physics*. Отметим работы [12, 13], в которых рассмотрена известная проблема расхождения между оценками масс цефеид по теории звездной эволюции и по нелинейной теории звездных пульсаций. Результаты позволяют надеяться, что это расхождение не является критическим и может быть ликвидировано последующими уточнениями обеих теорий. Другой важной проблемой, продолжающей беспокоить теоретиков, остается влияние конвекции на положение красной (холодной) границы полосы неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рессела (см. [14] и ссылки там). Пожалуй, наиболее впечатляющее достижение нелинейной теории пульсаций за последние годы — ее успешное применение к звездам с большим отношением светимости к массе, что, в частности, способствовало существенному прогрессу в понимании замечательных нестационарных звезд типа FG Стрелы [15, 16].

В основу книги Дж. П. Кокса легли лекции, обзоры и оригинальные статьи, что, по-видимому, повлияло на стиль изложения: логически стройный текст учебника сменяется «аннотационной вязью» научного обзора или подробными разъяснениями физического смысла. Вообще стремление автора к физической ясности — одно из главных достоинств книги. Другое достоинство — высокий научный уровень и широкое использование достижений в смежных областях знания. При этом автор часто ссылается на учебники и монографии, не все из которых доступны советскому читателю. Взамен можно рекомендовать следующую отечественную литературу: по векторному и тензорному анализу — книгу [17], по уравнениям математической физики — [18, 19], по газовой динамике — [20 — 23], по методам вычислений — [19, 22, 24 — 26], по теории колебаний [27 — 29], по асимптотическим методам — [30].

Редактор, переводчик и издательство приносят автору искреннюю благодарность за большую помощь, оказанную при подготовке русского издания.

Есть все основания надеяться, что предлагаемый перевод книги Дж. П. Кокса будет полезен не только астрофизикам, но и заинтересует специалистов по теории колебаний и газовой динамике. Книга имеет достоинства как учебника, так и научной монографии, в которой кроме устоявшихся результатов сформулированы нерешенные задачи и очерчены перспективы развития теории. Поэтому можно ожидать, что «Теория

звездных пульсаций» найдет широкую читательскую аудиторию — от студентов до научных сотрудников самой высокой квалификации.

Октябрь 1982 г. *Д. К. Надёжин*

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукаркин Б. В., Паренаго П. П. Переменные звезды, т. I, Физические переменные звезды. — М.-Л.: ОНТИ, 1937.
2. Паренаго П. П., Кукаркин Б. В. Переменные звезды и способы их наблюдения. — М. — Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947.
3. Цесевич В. П. Переменные звезды и способы их исследования. — М.: Педагогика, 1970.
4. Пульсирующие звезды/Под ред. Б. В. Кукаркина. — М.: Наука, 1970.
5. Явления нестационарности и звездная эволюция/Под. ред. А. А. Боярчука и Ю. Н. Ефремова. — М.: Наука, 1974.
6. Труды четвертого совещания по вопросам космогонии: Нестационарные звезды. — М.: АН СССР, 1955.
7. Проблемы звездной эволюции и переменные звезды/Под ред. И. М. Копылова. — М.: Наука, 1968.
8. Франк-Каменецкий Д. А. Физические процессы внутри звезд. — М.: Физматгиз, 1959.
9. Дибай Э .А., Каплан С. А. Размерности и подобие астрофизических величин. — М.: Наука, 1976.
10. Воронцов С. В., Жарков В. Н. Собственные колебания Солнца и планет-гигантов. — УФН, **134**, 675, 1981.
11. Stellar Hydrodynamics. Proc. 58th Colloq. IAU, Los Alamos, Aug. 12 — 15, 1980, Space Sci. Rev., **27**, No.3 — 4, 1980.
12. *Hodson S. W.*, *Cox A. N.* Nonlinear calculations for bump cepheids, Lecture Notes Phys., **125**, 34, 1980.
13. Фадеев Ю. А. Теоретическая последовательность Герцшпрунга и зависимость масса — светимость классических цефеид. — Научные информации Астрон. Совета АН СССР, **47**, 38, 1981.
14. Памятных А. А. Об определении положения красной границы полосы неустойчивости с помощью линейных расчетов пульсаций звезд. — Научные информации Астрон. Совета АН СССР, **46**, 126, 1979.
15. *Fadeyev Yu. A.*, *Tutukov A. V.* A hydrodynamical model of FG Sagittae pulsations, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **195**: 811, 1981.
16. *Fadeyev Yu. A.* Models of pulsating low-massive yellow supergiants. Astrophys. Space Sci., **86**, 143, 1982.
17. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965.
18. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Физматгиз, 1962.
19. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
20. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
21. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.
22. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
23. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. — М.: Атомиздат, 1981.

24. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1973.
25. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. — М.: Наука, 1972.
26. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1975.
27. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
28. Горелик Г. С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.
29. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
30. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Основная цель предлагаемой кннги — собрать воедино многочисленные результаты н обсуждения, касающиеся звездных пульсаций и разбросанные по астрофнзнческой лнтературе. Другая цель состояла в том, чтобы развнть на современном уровне ндеи, заложенные в двух классическнх работах по теорнн звездных пульсаций: кннге Росселанда «Теория пульсаций переменных звезд» [465] н энциклопедической статье Леду и Вальравена [345]. (Недавно вышла в свет прекрасная монография Унно, Осакн, Андо н Снбнхасн «Нерадиальные колебання звезд» [593].) Статья Леду н Вальравена является понстние нсчерпывающей, н настоящая кннга нн в коей мере не пытается заменнть эту классическую работу или конкурнровать с ней. Эту статью я цитнрую практическн в каждом разделе книги.

Однако статья Леду н Вальравена была опубликована в 1958 г., а за прошедшие четверть века в теории пульсаций получено много новых результатов. Поэтому одна из целей кннгн — представнть некоторые нз современных достнжений.

Теория звездных пульсаций почтн целиком базнруется на законах классической нерелятивнстской фнзнки. На ннх основано практнческн все наше нзложенне (обобщенне теорнн пульсаций с учетом эффектов общей теорнн относнтельности в большинстве случаев выходнт за рамкн настоящей кннгн, лнвь в гл. 19 кратко н, вероятно, недостаточно нсчерпывающе опнсываются эти эффекты).

В кннге представлены как раднальные, так н нераднальные колебання. Рассмотрение нераднальных колебаннй следует считать лншь введением в проблему; гораздо более глубокнй, детальный н обстоятельный анализ можно найти в упомянутой выше монографнн японских авторов [593].

Значительные усилия былн затрачены на то, чтобы четко объяснить различие между эйлеровыми н лагранжевыми варнациямн. Кроме того, лннеарнзованные уравнення былн запнсаны для нанболее общего случая, когда в невозмущенной модели присутствует поле скоростей.

Советское нзданне кннги практнческн не отличается от американского нздання 1980 г.; былн нсправлены лишь несколько опечаток. Кроме того, по предложению переводчика А. А. Памятных былн внесены несколько стнлистнческнх н других мелких нзмененнй. Однако еслн бы мне прншлось пнсать кннгу заново, то, думается, я уделнл бы больше места колебанням Солнца н нелинейным расчетам. Недавнне нсследовання подтвердилн выводы о том, что Солнце, по-виднмому, действнтельно подвержено разнообразным колебаниям, хотя н с малой амплнтудой. Такнм образом, Солнце следует, вероятно, считать переменной звездой (см., например, ряд статей в трудах конференцнн «Пульсацин классическнх н катаклнзмнческнх звезд», опублнкованных в 1982 г. под ред. Дж. Кокса н К. Хансена). Нелннейные явления, без сомнення, часто нграют решающую роль в теорни звездных колебаннй (напрнмер,прн рассмотреннн резонансов). Поэтому важно знать, как можно рассчитать влнянне некоторых нз этих нелинейных эффектов.

Перевод книгн на русский язык является совершенно естественным. Советские уче-

иые виесли очень важный вклад в нзучение пульсацнй. Достаточно упомянуть лишь двонх. Если говорнть о иаблюденнях, то это Б. В.Кукаркнн, под редакцией которого вышла важиая киига «Пульсирующие звезды» [315] (переведенная в 1975 г. на английский язык) и который был соавтором (вместе с П. П. Паренаго) хорошо известной обзориой статьи в *Basic Astronomical Data* (*ed. K. Aa. Strand, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1963*). Вместе со своими сотрудниками Б. В. Кукаркин подготовил в коице 1960 — 1970-х годах классический «Общий каталог переменных звезд» и дополиеиия к нему. Если говорить о теории, то необходимо отметить С. А. Жевакиыа, первым высказавшего идею о том, что главный нсточник иеустойчивости классических цефеид, а возможно, и других типов перемеиных звезд связан с второй ионнзацией гелия. Результаты его пиоиерских исследований былн опубликованы в начале 1950-х годов в трех ставших теперь классическими статьях в «Астрономическом журиале» и переведенных впоследствии на английский язык. Эти работы оказали огромиое влияние иа развитие миогих аопектов теории пульсирующих звезд. Некоторые из идей Жевакииа были также опубликованы в обзорной статье в *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* [639] и в первой главе упомииавшейся выше киити «Пульсирующие звезды» [315].

В заключенне мие хотелось бы нскренне поблагодарить А. А. Памятиых, взявшего на себя трудную и не слишком благодарную задачу перевода кнниги на русскнй язык. Он внес также ряд предложеиий, которые должны улучшить ясиость и точность изложения.

24 июня 1982 г. *Дж. П. Кокс*

*Ричарду Н. Томасу,
предоставившему мне возможность
переработать и расширить конспект лекций,
на котором частично основана
настоящая книга*

ПРЕДИСЛОВИЕ

За прошедшие 30 лет на английском языке не было опубликовано ни одного учебника или монографии, посвященной теории звездных пульсаций. Последняя книга на эту тему, насколько мне известно, — это классический труд С. Росселанда (Теория пульсаций переменных звезд) [465], вышедший в 1949 г. и почти полностью посвященный теории чисто радиальных колебаний *. Даже со времени появления всеобъемлющей, поистине энциклопедической статьи П. Леду и Т. Вальравена [345] прошло уже более 20 лет. Эта статья многие годы служила и, несомненно, еще будет служить универсальным справочным пособием в рассматриваемой области; действительно, она упоминается почти в каждом разделе настоящей книги. Однако со времени публикации удалось решить ряд важнейших астрофизических задач, касающихся переменных звезд. Кроме того, многие основные представления теории нерадиальных колебаний оставались невыясненными вплоть до середины или конца 1960-х годов и все еще продолжают появляться новые результаты. Некоторые из последних достижений описаны в различных обзорных статьях (см. ссылки в гл. 1), однако эти статьи вместе с большей частью вспомогательного материала, необходимого для детального понимания теории звездных пульсаций, разбросаны по обширной физической и астрофизической литературе. В настоящей книге я собрал воедино значительную часть таких данных и попытался удовлетворить потребность астрофизиков во всестороннем и достаточно подробном анализе этих проблем на современном уровне.

В настоящей книге рассматривается теория как радиальных, так и нерадиальных колебаний. Однако ее обобщение в рамках общей теории относительности (середина 1960-х годов и позже) почти не затрагивается. Таким образом, если специально не оговорено, то предлагаемое рассмотрение проводится в рамках ньютоновской нерелятивистской физики.

Книга состоит из трех частей. Часть I включает пять глав и содержит краткие сведения о важнейших данных наблюдений (гл. 3), краткую сводку основных уравнений гидродинамики и потока тепла, представленных в виде, удобном для астрофизических приложений (гл. 4), и довольно подробное рассмотрение линейной теории (гл. 5). Я постарался как можно лучше объяснить различия между эйлеровыми и лагранжевыми вариациями и записать линеаризованные уравнения для наиболее общего случая, когда имеется поле скоростей. Бóльшая часть изложения основана на моей работе 1967 г. [132]. Я использовал также свои неопубликованные результаты, полученные в 1974 г.

Часть II, состоящая из восьми глав, посвящена чисто радиальным колебаниям. Здесь очень подробно представлена теория линейных адиабатических радиальных колебаний (гл. 8), а также рассмотрены теория и расчеты неадиабатических и нелинейных колебаний (гл. 9 — 12). В гл. 13 описаны некоторые простые модели звездных пульсаций

---

* Недавно Унно, Осаки, Андо и Сибахаси [593] опубликовали монографию, посвященную нерадиальным колебаниям звезд.

(преимущественно радиальных). Кратко упомянуты также некоторые последние достижения в развитии наших представлений о переменных звездах.

Часть III, включающая шесть заключительных глав посвящена в основном, теории нерадиальных звездных колебаний. Обозначения и терминология, используемые в теории нерадиальных колебаний, приводятся в гл. 17. Бо́льшая часть этой главы написана в 1976 — 1977 гг., и поэтому в ней не отражены более поздние детальные результаты, представленные, например, в работах Кристенсена-Далсгаарда [86], Сибахаси [507] и Вольфа [626] и в монографии Унно, Осаки, Андо и Сибахаси [593]. Данное обстоятельство, хотя и вызывает сожаление, но оно неизбежно в быстро развивающихся областях науки, особенно если учесть, что требуется значительное время на публикацию. В эту часть книги я включил не только те вопросы, которые могут считаться логически связанными с общей темой, но и некоторые из последних результатов, упомянутых выше. В частности, гл. 19 как раз посвящена смешанным вопросам. Рассматриваемые в этой главе случаи характеризуются прежде всего отказом от одного или нескольких обычно принимаемых предположений — предположений, которые считаются справедливыми в большинстве остальных глав книги.

По своему уровню книга рассчитана на аспирантов первого года обучения. Предполагается знание математического анализа, дифференциальных уравнений, векторного анализа и матричной алгебры. Из-за ограниченного объема в большинстве случаев не удалось привести подробные доказательства и выводы, а поэтому читателю, возможно, придется проделать это самому.

Хотя данная книга не писалась как учебник (например, в ней нет никаких упражнений), тем не менее она может оказаться полезной и в качестве учебника. Думается, в ней более чем достаточно материала, чтобы организовать для аспирантов одно — двухсеместровый курс по переменным звездам. Вероятно, книга будет наиболее полезной студентам и научным сотрудникам, работающим в этой и смежных областях.

Настоящая книга основана в значительной степени на заметках, подготовленных для курса лекций по переменным звездам, который автор читал несколько раз за последние 15 лет аспирантам Колорадского университета. В книгу включены также материалы из нескольких обзорных статей автора, посвященных переменным звездам (разумеется, эти обзорные статьи частично базируются на том же самом курсе лекций!).

Мне доставляет большое удовольствие поблагодарить всех, кто прямо или косвенно внес свой вклад в эту книгу. Я хотел бы выразить особую признательность Колорадскому университету за предоставление мне отпуска в течение весеннего семестра 1975 г., когда я начал и частично завершил переработку моих конспектов в книгу. Я благодарен также проф. В. Риджнеру за предоставленную мне возможность работать на факультете физики и астрономии Университета Нью-Мексико в течение части этого периода, и проф. Д. Книгу за большую моральную поддержку и многочисленные полезные обсуждения.

Я особенно благодарен д-ру М. Айзенману за его содействие в издании книги и за многочисленные обсуждения и проф. С. Чандрасекару за прочтение некоторых глав и полезные замечания, а также за большую общую помощь и советы. Я благодарен проф. К. Хансену, прочитавшему и прокомментировавшему многие главы и сделавшему ряд полезных предложений, проф. Н. Бейкеру, также прочитавшему и прокомментировавшему несколько глав, и проф. М. Смиту, высказавшему полезные замечания и предложения, касающиеся прежде всего гл. 17. Я признателен д-ру С. Г. Дэвис, любезно обратившей мое внимание на ряд статей и материалов конференций, которые в противном случае не вошли бы в эту книгу. В то же время я заранее приношу извинения тем лицам, работы которых цитировались недостаточно.

Полезные дискуссии с проф. А. Вайгертом, д-ром М. Айзенманом и проф. П. Смей-

ерсом помогли мне более четко понять многие основные идеи. Я особенно благодарен проф. Смейерсу за его квалифицированную помощь в некоторых сложных вопросах. Я также признателен Д. Шванку, Р. Гроссу и Б. Кэрролу за помощь в кажущейся нескончаемой работе при подготовке книги подобного рода. Я благодарен также А. Уинну и М. Кроуч за их любезную помощь в подготовке библиографии. Большую помощь оказал также проф. Р. Мак-Крей в поисках ссылок на работы о вспыхивающих рентгеновских источниках.

Мне хотелось бы поблагодарить мою жену, д-ра Дж. Близард-Кокс, за проявленное ею терпение, ободрение и моральную поддержку в течение почти четырех лет и принести извинения за мои многочисленные отъезды, потребовавшиеся для написания этой книги.

На окончательное содержание книги прямо или косвенно повлияли дискуссии с многими людьми в дополнение к тем, кого я упомянул. Среди них — Т. Адамс, Г. Бергрен, У. Бриттэн, Т. Браун, Р. Бачлер, Дж. Кастор, Й. Кристенсен-Далсгаард, Р. Кристи, Л. Клаутмен, Б. Коган, А. Кокс, Е. Ф. Кокс, У. Р. Дейвн, Д. Дэвисон, Р. Дюпри, Б. Л. Дикерсон, В. Дзембовски, Д. Эйлерс, Дж. Фоллер, Д. Фишел, У. Фитч, Ф. Флауэр, Р. Гарстанг, М. Гуссенс, Д. Гаф, Г. Хилл, С. Хилл, Н. Хоффман, Д. Хаммер, Ч. Келлер, Дж. Ленджер, Ж. Лятур, П. Леду, Дж. Леш, Д. Линд, Дж. М. Мэлвилл, Дж. Мак-Гро, П. Мелвин, В. Михалас, Д. Михалас, Дж. Нельсон, Ё. Осаки, А. Фелпс, Р. Росс, Х. Сайо, Э. Шмидт, М. Шварцшильд, Р. Скуфлер, Н. Саймон, А. Скаманич, У. Спэнгенберг, У. Спаркс, С. Старфилд, Р. Стеллингверф, К. Стеркен, Р. Стоуби, П. Страй, Ю. Тумре, Х. ван Хорн, Дж. Валлерстейн, Б. Уорнер, Дж. К. Унлер, Ч. Унтин, Д. Уингет, Ч. Вольфф, К. Зафиратос и К. Знбарт.

Я особенно благодарен многим студентам, число которых слишком велико, чтобы перечислить их фамилии, за то, что они терпеливо слушали мои лекции, и за их вопросы, приведшие к более ясному пониманию мною некоторых деталей. Это в свою очередь, вероятно, способствовало более четкому изложению ряда вопросов в данной книге.

Я искренне благодарен многочисленным авторам, присылавшим мне препринты своих работ в течение нескольких последних лет.

За квалифицированную подготовку рукописи и за помощь в других редакционных делах я очень признателен Л. Вольски, Л. Хаас и Г. Роми.

За любезное разрешение воспроизводить опубликованные материалы я благодарен Американскому институту физики, Астрономическому обществу Японии, редакциям журналов *Astronomy and Astrophysics*, *Astrophysical Journal*, *Annual Reviews, Inc.* Мне хотелось бы поблагодарить также издательство Принстонского университета и его сотрудников за большое терпение и снисходительность. При этом я особенно благодарен г-ну Э. Тенеру.

Большая финансовая поддержка в течение времени, потребовавшегося для написания книги, была оказана по субсидиям Национального научного фонда MPS 72-05309, AST 72-05039 A04, AST 77-23183, AST 76-01586 и AST 78-42115, предоставленным через Колорадский университет. Я благодарен также д-ру Ч. Ф. Келлеру за его разрешение работать в Лос-Аламосской научной лаборатории (финансовая поддержка была обеспечена Администрацией по исследованию и разработкам источников энергии), и я признателен д-ру А. Коксу из этой лаборатории за проявленный им интерес к моей работе и наши многочисленные дискуссии в течение ряда лет.

15 августа 1979 г.

Часть I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ

Пульсирующие звезды — это объекты, в которых происходят крупномасштабиые диинамическне двнжения, обычно охватывающие всю звезду и, как правило, более или менее ритмичные. Простейшим типом таких движеиий являются чисто радиальные пульсацин, прн которых звезда сохраняет сферическую форму, но изменяет свой объем — как бы «дышит».

Изученне пульснрующих звезд составляет относнтельно небольшую, но очень важную область современной астрофнзнки. Идея, что колебання блеска некоторых тнпов переменных звезд обусловлены перноднческим нлн циклическим расшнреиием и сжатием, впервые была высказана в 1914 г. Шепли [505], а ее строгие математнческие основы былн заложены в 1918 г. Эддингтоиом [195, 196]. С тех пор «гипотеза пульсаций» получила широкое распространеиие. Исследование пульснрующих звезд, как теоретическое, так и с помощью иаблюдеиий, дало мощное средство для изучеиия виутрениего строеиия звезд и для развития другнх областей современной астрофизики. (Краткое описаиие раииих этапов развнтня теорни пульсаций дано в кингах Росселанда [465, гл. 1] и Эддингтоиа [197, ch. 8] и в статье Леду н Вальравена [345].) Одним нз наиболее эффектиых и фундаментальных результатов, получеииых из иаблюдений лучше всего известиого типа пульсирующих звезд — *классических цефеид*, — является известное соотиошение *период — светимость* (разд. 3.1). Это соотиошеиие служит основиым «эталоном» для нзмереиия огромиых астроиомических расстояний — порядка среднего расстояння между галактиками, — и оио сыграло решающую роль в установлеиии фундаментальиой шкалы расстояиий во Вселениой. Кроме того, попытки поиять причииы и прнроду звездиых пульсацнй бросили своего рода вызов теоретикам и привели к некоторым захватывающим и в известном смысле уникальиым применениям физической теории. Важиость н значеиие исследоваиия пульснрующих звезд будут также рассмотреиы в разд. 19.7.

Пульсирующие звезды представляют собой лншь подкласс более широкого класса *физических переменных звезд.* Это такие звезды, причина переменности которых заключена в них самих, а ие обусловлеиа геометрическими эффектами, как для затемиеиных двойных, или иекоторыми внешиимн причинамн, например взаимодействием с межзвездиой средой нли околозвездным веществом. Весь класс физнческих перемеиных включает в себя много различных типов объектов, причем некоторые из иих, такие, как квазизвездные объ-

екты, не являются звездами в обычном смысле слова. (Обзоры работ о квазарах даны, например, в [58, 437]*, полупопулярное описание см. в [530].) Физические переменные обычно подразделяют на две обширные группы: *пульсирующие переменные* и *эруптивные переменные*. Предлагаемая монография имеет дело в основном с первой группой: краткий обзор входящих в нее типов звезд будет дан в гл. 3. Типичными представителями эруптивных переменных являются новые и сверхновые, которые в данной книге подробно рассматриваться не будут. Обзоры, посвященные некоторым типам эруптивных переменных, можно найти, однако, в [402, 510] (сверхновые); [426] (новые); [319, 345, 425] (весь класс физических переменных, включая повторные новые и новоподобные звезды); [388] (карликовые новые); [455, 614] (катаклизмические переменные в целом); [264] (звезды типа Т Тельца). См. также материалы коллоквиума № 42 МАС [306]. Если специально не оговорено, то в данной книге под термином «переменная звезда» мы всегда будем подразумевать «физическая переменная звезда».

Наиболее общее определение переменной звезды – это звезда, физические свойства которой с течением времени изменяются. Однако обычно принимается более ограниченное определение: переменными обычно называют такие звезды, свойства которых заметно изменяются за время, скажем, от нескольких секунд или долей секунды до нескольких лет или десятилетий, и поэтому подобные изменения довольно легко обнаруживаются в наблюдениях.

Самая очевидная и легче всего обнаружимая особенность переменной звезды – колебания ее видимого блеска: и действительно, большинство таких звезд открыто по изменениям их блеска. При этом обычно меняются и другие наблюдаемые параметры, такие, как лучевая скорость и спектральный класс или цвет. У *пульсаров* наблюдается переменное радиоизлучение с периодом от нескольких долей секунды до нескольких секунд, по которому их обычно обнаруживают [233, 267, 471, 472, 529, 569]. Однако у пульсара NP 0532 в Крабовидной туманности были открыты одновременные изменения видимого блеска [102]. У некоторых рентгеновских «пульсаров» также найдены изменения блеска, происходящие одновременно с рентгеновскими вспышками [158, 221, 276, 322]. С другой стороны, в некоторых случаях, как, например, у спектральных или магнитных переменных или у звезд спектрального класса B с переменными профилями линий (звезды типа 53 Персея) [531–534, 537], блеск может оставаться почти постоянным, а на переменность звезды могут указывать изменения некоторых других характеристик, например деталей в спектре или напряженности магнитного поля (см., например, [183, 342, 486]). Благодаря 11-летнему циклу Солнце, строго говоря, также является переменной звездой (даже если не упоминать мелкомасштабных колебаний, зарегистрированных Хиллом с сотрудниками* [54, 268, 272]; см. также многочисленные статьи в [270] и различные ссылки в [247], а в связи с общей

*См. также *Schmidt M.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., 7, 527, 1969.

*Сообщалось также об открытии колебаний Солнца с периодом 160 мин (*Severny A. B.*, *Kotov V. A.*, *Tsap T. T.* Nature, 259, 87, 1976, *Brookes J. R.*, *Isaak G. R.*, *van der Raay H. R.* Nature, 259, 92, 1976.) — *Прим. ред.*

проблемой возможной переменности Солнца еще и книги [201, 621]). Кроме того, вспыхивающие рентгеновские источники также показывают изменения с характерным временем порядка минут (см., например, [248, 348—350]), а для источников гамма-всплесков характерна переменность с временами порядка 0,1 – 100 с (см., например, [101, 216, 307, 562]). (Рентгеновским источникам в целом посвящен обзор Острайкера [412].)

Изменения, свойственные пульсирующим переменным, могут быть периодическими (или циклическими), полуправильными или неправильными. Соответствующие характерные времена заключены в диапазоне от нескольких десятков секунд до нескольких лет. Возможно, конечно, что существуют изменения с характерными временами и вне указанного диапазона, но проблема их обнаружения довольно сложна.

Периодические или циклические переменные были открыты относительно поздно в истории астрономии. Вероятно, первой достоверной регистрацией такой переменной звезды было открытие Фабрициусом в 1596 г. (см. [345]) Миры Кита (o Cet) – долгопериодической переменной (гл. 3). Были зарегистрированы также несколько сверхновых: сверхновая 1054 г. в Крабовидной туманности, сверхновая Тихо 1572 г. и сверхновая Кеплера 1604 г., но все они относятся к классу эруптивных переменных. К концу XVIII в. были открыты лишь 16 переменных звезд, две из которых впоследствии оказались затменными двойными, а пять были новыми [61]. Две звезды из оставшихся девяти – классические цефеиды: δ Цефея, типичный представитель всей этой группы (гл. 3), открытая Джоном Гудрайком в 1784 г., и η Орла, открытая в том же году Эдвардом Пиготтом [61]. В настоящее время в нашей Галактике известно около 25 000 физических переменных звезд, свыше 20 000 из которых собраны в каталоге Кукаркина и др. [316]. Более 90% из них – пульсирующие переменные. Полное число таких переменных во всей Галактике составляет, по оценкам Кукаркина и Паренаго [319], около $2 \cdot 10^6$ звезд. Но поскольку общее число звезд в Галактике около 10^{11} — 10^{12}, то это означает, что лишь одна из 10^5 — 10^6 звезд является пульсирующей. Поэтому в целом звездные пульсации оказываются весьма редким явлением. Тем не менее они имеют очень большое значение в астрофизике, как будет показано в последующих главах данной книги. Открытие переменных белых карликов, или «звезд типа ZZ Кита», [363, 392, 456—458], может несколько изменить указанные оценки.

В гл. 2 мы введем, главным образом для общего представления, некоторые характерные времена для звезд. В гл. 3 мы дадим краткий обзор эмпирических данных о пульсирующих переменных. Поскольку наблюдениям переменных звезд посвящено очень много работ и ряд хороших обзоров (ссылки на которые мы укажем), мы приведем лишь наиболее важные данные.

В гл. 4 мы кратко изложим некоторые основные теоретические результаты, которые часто будут использоваться в дальнейшем. Если специально не оговорено, то в этой главе, как всюду в этой книге, мы будем вести рассмотрение в рамках классической механики и ньютоновской теории тяготения. Пренебрежение эффектами специальной теории относительности при рассмотрении пульсирующих звезд в большинстве случаев вполне оправданно, поскольку характерные скорости обычно малы в сравнении со скоростью све-

та. Пренебрежение эффектами общей теории относительности также оправдано для большинства пульсирующих звезд, поскольку гравитационные поля обычно очень слабые; иными словами, средние радиусы большинства типов пульсирующих звезд много больше их радиусов Шварцшильда $R_S = 2GM/c^2$, где G – гравитационная постоянная, M – масса звезды, а c — скорость света. Примерами звездных объектов, в которых указанные приближения не выполняются, являются плотные белые карлики (см., например, [375]), нейтронные звезды, «сверхмассивные звезды», если они существуют (см., например, [613]), и сколлапсировавшие объекты, или «черные дыры» (см., например, [193; 434; 473; 573; 635, гл. 11]). В настоящей книге эти исследования в релятивистской теории пульсирующих звезд подробно рассматриваться не будут (см., однако, разд. 19.5 и обзор [133]).

В гл. 5 рассматривается линейная теория звездных колебаний. Она сыграла первостепенную роль в развитии наших современных представлений о пульсирующих звездах. До недавнего времени эта теория служила основой почти всех теоретических исследований пульсирующих звезд, даже несмотря на тот хорошо известный факт, что пульсации реальных звезд имеют обычно достаточно большие амплитуды, чтобы определенную роль играли нелинейные эффекты. Тем не менее линейная теория оказывается чрезвычайно полезной отчасти потому, что ее относительная математическая простота облегчает понимание физических основ некоторых сложных явлений. Эта теория полезна еще и в том случае, если считать, что по крайней мере некоторые виды реальных звездных пульсаций возникли потому, что звезда когда-то была неустойчивой относительно бесконечно малых колебаний. То обстоятельство, что большинство общепризнанных типов пульсирующих звезд занимают более или менее четко ограниченные области диаграммы Герцшпрунга–Рессела (рис. 3.1), наводит на мысль о существовании некоторой связи между линейной неустойчивостью, зависящей (предположительно) от «статических» характеристик звезды, и реальными звездными колебаниями.

Часть II будет полностью посвящена чисто радиальным движениям, которым в настоящей книге уделяется значительное место. Существуют две главные причины такого выделения радиальных движений. Во-первых, это простейший вид движений в сферических звездах, он относительно легко поддается математической обработке, и многие из его аспектов можно понять физически. Во-вторых, большинство реальных пульсирующих звезд совершают, по-видимому, преимущественно именно такие простые колебания.

Часть III посвящена в основном теории нерадиальных колебаний звезд.

В гл. 19 мы кратко рассмотрим или по крайней мере упомянем, дав соответствующие библиографические ссылки, некоторые усложняющие факторы в теории звездных пульсаций (радиальных и нерадиальных), такие, как вращение, вязкость, магнитные поля, эффекты нарушения теплового равновесия и эффекты общей теории относительности. Будет упомянут также ряд смежных проблем, таких, как вековая устойчивость звезд, и будет сделано несколько замечаний о значении теории звездных колебаний для развития других областей астрофизики.

Обзоры, посвященные пульсирующим звездам и теории пульсаций, пред-

ставлены в работах Пейн-Гапошкиной [424, 425], Леду и Вальравена [345], Леду и Уитни [346], Леду [336—339], Жевакина [639], Кристи [92, 94—98], Дж. Кокса [132, 133, 135, 136, 139], А. Кокса и Дж. Кокса [118], Кинга и Кокса [299], Кокса и Джули [146, Ch. 27], Ибена [280], Хофмейстера [277], Перси [435], Глэсби [234] и в книге под редакцией Кукаркина [315]. Более ранние обзоры даны в книгах Эддингтона [197, Ch. 8] и Росселанда [465]. Полезные сборники статей о пульсирующих звездах – труды Третьего коллоквиума МАС по переменным звездам (Бамберг, ФРГ, 1965) The Position of Variable Stars on the H-R Diagram (Положение переменных звезд на диаграмме Герцшпрунга – Рессела), труды Пятого коллоквиума МАС по переменным звездам (Бамберг, ФРГ, 1971) New Directions and New Frontiers in Variable Star Research (Новые направления и новые рубежи в исследовании переменных звезд), а также труды других многочисленных конференций [121, 167, 168, 214, 215, 218, 270, 306, 340, 443, 561]. Недавно Унно, Осаки, Андо и Сибахаси опубликовали монографию [593] о нерадиальных колебаниях звезд.

Очень большую пользу принесли автору некоторые работы, посвященные волновым явлениям вообще. Возможно, они будут полезны и читателям. Это книги Морзе [386], Гринспэна [249], Толстого [581], Лайтхилла [351] и Мейна [358].

ГЛАВА 2
НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ВРЕМЕНА

В этой главе мы рассмотрим некоторые важные характерные времена для звезд и дадим грубые оценки порядков величин. Для пульсирующих звезд особый интерес представляют характерные времена в пределах от нескольких секунд до нескольких лет.

2.1. Период пульсаций

Первым и наиболее важным среди характерных времен для пульсирующих звезд является период пульсаций П в основной моде чисто радиальных колебаний. Хотя в последующих главах будут рассмотрены точные методы вычисления П, полезно сначала уделить внимание некоторым простым приближенным способам оценки этой величины, дающим почти такие же результаты, как и более сложные методы. По порядку величины это значение П пригодно и для низших акустических и гравитационных мод нерадиальных колебаний более или менее реалистичных звездных моделей (гл. 17).

Вероятно, самый общий из этих простых методов описан в [132]; он основан на том, что звездные пульсации (по крайней мере для низших мод) можно приближенно считать некоторым видом «длинноволновых» акустических колебаний (когда длина «звуковой волны» порядка или даже больше размеров системы), как это показано в [345, Sect. 60], см. также разд. 8.9 настоящей книги. Тогда период пульсаций должен быть порядка времени, необходимого звуковой волне для распространения вдоль среднего или равновесного диаметра звезды. Общее выражение для лапласовой (адиабатической) скорости

звука (разд. 5.5), усредненной некоторым подходящим образом по всей звезде в ее равновесном состоянии, можно получить из теоремы вириала (см., например, [146, Ch. 17]). Это выражение практически не зависит от свойств звездного вещества.

Грубый, но примерно эквивалентный метод вывода выражения для средней скорости звука состоит в следующем. Используется уравнение гидростатического равновесия (см., например, гл. 4), и все величины в нем рассматриваются как средние или характерные значения для всей звезды. Подставляя эти значения в выражение (5.38) для скорости звука, мы и получим желаемый результат.

Данный подход показывает очень приближенно, что $\Pi\bar{\rho}^{1/2} = \text{const}$. А это — известное соотношение период — средняя плотность, которое представляется справедливым для большинства типов пульсирующих звезд (см., например, гл. 3). Согласно этому соотношению, чем больше размеры звезды, тем больше период пульсаций.

Из приведенных рассуждений следует также, что постоянная в этом соотношении содержит множитель $\Gamma_1^{-1/2}$, где Γ_1 – один из адиабатических показателей (гл. 4), принимаемый в данном случае постоянным. При более тщательном выводе обнаруживается, что следует взять множитель $(3\Gamma_1 - 4)^{-1/2}$, который обусловлен сферической симметрией задачи и изменениями ускорения силы тяжести, что не полностью учитывалось в приближенном рассмотрении. Тогда значение Π будет гораздо больше, чем дает прежнее выражение, если величина Γ_1 близка к 4/3; это имеет место в релятивистских белых карликах, или нейтронных звездах, или в очень массивных звездах, где давление излучения оказывается больше газового. При $\Gamma_1 = 4/3$ $\Pi = \infty$, а при $\Gamma_1 < 4/3$ звезда динамически неустойчива.

Еще одно простое приближение для периода пульсаций звезды, в которое, кроме того, входит правильный множитель $(3\Gamma_1 - 4)^{-1/2}$, получают следующим образом. Предположим, что вся масса M звезды сконцентрирована в центре и что ее поверхность, находящаяся на среднем расстоянии R от центра, представляет собой тонкую сферическую оболочку массы m, малой по сравнению с M, причем оболочка нисколько не препятствует изменениям своего радиуса, за исключением инерции (т.е. является идеально сжимаемой невязкой, и в ней отсутствует поверхностное натяжение). Весь объем внутри этой сферы заполнен однородным газом, не имеющим массы, единственная функция которого состоит в том, что он создает давление, препятствующее сжатию оболочки под действием сил тяготения, причем система находится в вакууме (давление $P = 0$). Если r – мгновенный радиус такой оболочки, то уравнение ее движения имеет вид:

$$m\ddot{r} = 4\pi r^2 P - GMm/r^2, \tag{2.1}$$

где точки обозначают производную по времени, P – давление газа внутри сферы (постоянное по всему объему), а G – гравитационная постоянная. Предположим теперь, что имеют место адиабатические колебания относительно равновесного состояния (характеризуемого соотношением $\ddot{r} = 0$); т.е. примем, что $\delta P/P = \Gamma_1 \delta\rho/\rho$, где, например, δP – это отклонение давления от

равновесного значения. Линеаризуя уравнение (2.1) (подробное рассмотрение линеаризации см. в гл. 5) и предполагая зависимость от времени в виде $e^{i\sigma t}$, легко показать, что угловая частота пульсаций σ дается соотношением

$$\sigma^2 = (3\Gamma_1 - 4)GM/R^3 = (3\Gamma_1 - 4)\cdot \tfrac{4}{3}\pi G\bar{\rho}, \qquad (2.2)$$

причем последнее равенство служит определением средней плотности $\bar{\rho}$. Отсюда получаем следующее выражение для периода пульсаций $\Pi = 2\pi/\sigma$:

$$\Pi = 2\pi/[(3\Gamma_1 - 4)\cdot \tfrac{4}{3}\pi G\bar{\rho}]^{1/2} \qquad (2.3)$$

Любопытно, что величина Π из (2.3) совпадает с точным значением периода основной моды чисто радиальных пульсаций однородной модели (т.е. модели с постоянной по всему объему плотностью) с заданными значениями Γ_1 и $\bar{\rho}$.

Тщательно прослеживая вывод уравнения (2.2), легко понять происхождение «магического» критического числа 4/3 (см. выше замечание относительно динамической неустойчивости). Запишем это число как $(2 + 2)/3$. Одна из двоек обусловлена тем, что ньютоновская сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния (если не оговорено специально, то мы в данной книге рассматриваем только такую зависимость); другая — тем, что суммарная сила давления, действующая на сферу радиуса r, пропорциональна r^2. А тройка связана с трехмерностью физического пространства: объем сферы радиуса r пропорционален r^3.

Соотношение период — средняя плотность обычно записывают в виде

$$\Pi(\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot)^{1/2} = Q, \qquad (2.4)$$

где $Q \propto (G\bar{\rho}_\odot)^{-1/2}$ — «пульсационная постоянная» ($\bar{\rho}_\odot = 1{,}41$ г/см^3 – средняя плотность Солнца). В действительности величина Q не является постоянной, ее значение зависит, хотя обычно лишь слабо, от величины Γ_1 и от внутреннего строения звезды. Точные расчеты показывают, что для основной радиальной моды при $\Gamma_1 = 5/3$

$$0{,}03 \leqslant Q \leqslant 0{,}12 \text{ сут}, \qquad (2.5)$$

причем типичным является значение $Q \approx 0{,}04$ сут. В работах [151, 207] приведены интерполяционные формулы, дающие Q как функцию звездных параметров (прежде всего массы и равновесного радиуса). Величина Q равна периоду пульсаций Солнца: если бы оно пульсировало в основной моде радиальных колебаний, то период составлял бы около часа. Наблюдения большого числа переменных звезд (сами по себе достаточно неуверенные!) дают значение Q в пределах

$$0{,}02 \lesssim Q \lesssim 0{,}11 \text{ сут} \qquad (2.6)$$

в разумном согласии с теорией.

На основе соотношения период—средняя плотность (2.4) можно оценить ожидаемые периоды пульсаций известных типов звезд. Рассматривая звезды со средними плотностями от значений для умеренно плотных белых карликов, $\bar{\rho} \sim 10^6$ г/см^3, до значений для разреженных красных сверхгигантов,

$\bar{\rho} \sim 10^{-9}$ г/см^3, получаем, что периоды приближенно заключены в пределах

$$3\ \text{с} \lesssim \Pi \lesssim 1000\ \text{сут}, \tag{2.7}$$

и эти пределы хорошо соответсвуют диапазону наблюдаемых периодов большинства типов периодических, или циклических, физических переменных звезд (гл. 3). Такое согласие служит хорошим общим подтверждением теории пульсаций переменных звезд. Существуют и более сильные конкретные доводы в пользу этой теории, но они, однако, выходят за рамки настоящей книги (см., например, [197, Ch. 8]). Можно отметить, что если в указанную выборку включить и нейтронные звезды (которые мы, вероятно, наблюдаем как пульсары) со средними плотностями $\bar{\rho} \sim 10^{15}$ г/см^3, то нижний предел диапазона периодов составит несколько миллисекунд. Хотя пока нет никакого прямого свидетельства, что нейтронные звезды пульсируют, некоторые тонкие детали, наблюдаемые в переменном радиоизлучении пульсаров и имеющие характерное время порядка нескольких миллисекунд (см., например, [568]), вполне могут быть следствием пульсаций.

2.2. Время свободного падения

Время свободного падения, или динамическое время t_{ff},– это характерное время, связанное с динамическим коллапсом объекта или с орбитальным движением спутника на очень близком расстоянии от поверхности звезды; величина t_{ff} – это также характерное время, за которое значительные отклонения от гидростатического равновесия приводят к заметному изменению состояния звезды.

Простую оценку t_{ff} по порядку величины можно получить, вычисляя время, необходимое свободно падающему телу единичной массы для прохождения расстояния порядка R (радиуса звезды) под действием постоянного ускорения силы тяжести, равного ускорению силы тяжести на поверхности звезды, GM/R^2:

$$t_{ff} \sim (G\bar{\rho})^{-1/2} \tag{2.8}$$

(другие приближенные способы оценки t_{ff} приведены, например, в [146, Ch. 1]). Выражение (2.8) показывает, что, за исключением численных множителей, которые обычно порядка единицы, величина t_{ff} сравнима с периодом пульсаций Π. Этот хорошо известный результат является следствием того, что характерные скорости, связанные с низшими модами преимущественно радиальных пульсаций (т.е. скорость звука) и с динамическими процессами (например, скорости свободного падения или орбитального движения) или с низшими модами нерадиальных гравитационных колебаний, – все они определяются в основном гравитационной энергией звезды (через теорему вириала).

2.3. Кельвиновское время

Кельвиновское время t_K – это, по существу, «время релаксации» звезды, выведенной из состояния *теплового* равновесия, т.е. из состояния баланса меж-

ду выделением энергии в термоядерных реакциях в звездных недрах и ее потерями через поверхность звезды посредством излучения в виде фотонов и нейтрино. Порядок величины t_K можно оценить следующим образом. Пусть E_{th} – полная внутренняя (тепловая) энергия звезды, а L – ее светимость (суммарная скорость потерь энергии через поверхность). Тогда с точностью до порядка величины имеем

$$t_K \sim E_{th}/L. \tag{2.9}$$

Однако величину E_{th} с помощью теоремы вириала можно связать с гравитационной энергией звезды Ω. Для самогравитирующей системы, в которой нет никаких движений вещества (например, турбулентности, вращения, пульсаций), никаких магнитных полей и которая находится в гидростатическом равновесии, причем давление на ее поверхности обращается в нуль, теорему вириала можно записать в следующем общем виде:

$$3\int_V P dV = -\Omega, \tag{2.10}$$

где P – полное давление, а интегрирование проводится по всему объему V звезды. Величина Ω – это гравитационная потенциальная энергия сферической звезды, определяемая как

$$\Omega \equiv -\int_M (Gm/r)dm \equiv -qGM^2/R. \tag{2.11}$$

Здесь q – безразмерная постоянная, значение которой зависит от концентрации вещества к центру, для химически однородных звезд $q \sim 1$; интегрирование проводится по полной звездной массе M. Если предположить, что давление создается идеальным нерелятивистским газом, то имеем $E_{th} = \frac{3}{2}\int_V P dV$, откуда вытекает простая форма теоремы вириала $E_{th} = -\Omega/2$. Подставляя этот результат в соотношение (2.9), учитывая выражение (2.11) для Ω и принимая $q \approx 3/2$, получаем

$$t_K \sim \tfrac{3}{4}GM^2/(LR) \sim 2\cdot 10^7 M^2/(LR)\ \text{лет}, \tag{2.12}$$

где величины L, R и M взяты в солнечных единицах. Кельвиновское время t_K – это такое же время, которое потребовалось бы звезде, чтобы сжаться от бесконечных размеров до ее современного радиуса, если бы в течение всего сжатия светимость L оставалась постоянной.

Кельвиновское время обычно не связано непосредственно с периодом пульсирующих звезд, однако, как мы увидим в гл. 9, оно имеет отношение к характерным временам нарастания или затухания пульсаций.

Полезной безразмерной величиной является отношение времени свободного падения (порядка периода пульсаций) к кельвиновскому времени:

$$t_{ff}/t_K \sim \Pi/t_K \sim LR^{3/2}/(G^{3/2}M^{5/2}) \sim 10^{-12}LR^{3/2}/M^{5/2}, \tag{2.13}$$

где L, M и R – в солнечных единицах. Отсюда следует, что для звезд, не слишком отличающихся от Солнца, период пульсаций на много порядков величины меньше кельвиновского времени.

2.4. Ядерное время

Ядериое характериое время t_{nuc} представляет лишь косвениый иитерес для теории пульсирующих звезд, ио его все же полезио зиать для общего представлеиия. В широком смысле это время, иеобходимое для заметиого измеиеиия свойств звезды в результате термоядериой эволюции (т.е. в результате измеиеиия химического состава под действием ядериых превращений). Для звезды, в которой происходит гореиие водорода, ядериое время можио определить исходя из того, что при превращеиии одиого грамма водорода в гелий освобождается эиергия $\approx 0{,}007\ c^2 \approx 6 \cdot 10^{18}$ эрг (c – скорость света). Предполагая, что сиитез гелия может произойти в $\sim 10\%$ массы звезды, получаем

$$t_{nuc} \sim 10^{10} M/L \text{ лет}, \tag{2.14}$$

где M и L выражены в солиечиых едииицах. Легко видеть, что обычио

$$t_{nuc} \sim 10^3 t_K.$$

ГЛАВА 3
НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ НАБЛЮДЕНИЙ

В этой главе мы кратко рассмотрим ряд вопросов, связаиных с перемеииыми звездами и представляющих иитерес преимуществеиио с точки зреиия иаблюдений. Дополнительиые сведеиия о иаблюдаемых характеристиках разиообразиых типов перемеииых звезд всесторонне и детально рассматриваются, иапример, в работах [277, 315, 319, 345, 424, 425, 428, 433, 561] и в некоторых других исследоваииях, упомянутых в гл. 1. См. также краткий обзор в [133]. Вследствие огромиого числа работ иа эту тему и большого числа иовых открытий мы здесь ие претеидуем на полиоту представления иовейших результатов. Интересующемуся читателю советуем просмотреть текущую астрономическую и астрофизическую литературу. К пульсирующим перемеииым мы не относим *спектральные* и *магнитные* перемеииые (см., иапример, [342]), *вспыхивающие* звезды типа UV Кита (см., иапример, [353]), звезды типа Т Тельца (см., например, [264, 265]), поскольку иеясио, имеют ли их характеристики иепосредствеииое отношение к пульсациям. Мы ие рассматриваем и квазизвездные объекты (по причииам, указаииым выше; гл. 1), а также пульсары, поскольку их основные иаблюдаемые свойства обусловлены, по общему миеиию, вращеиием, а ие пульсациями (см., иапример, [60, 63, 267, 471]). Не рассматриваем мы и иедавио обиаружеиные колебаиия иекоторых катаклизмических перемеииых (см., например, [423, 455, 551, 614, 615, 617]), так как природа и причииа этих колебаний не известны. Часть материала настоящей главы является извлечеиием из обзора [133].

В табл. 3.1 суммироваиы иекоторые свойства иаиболее известиых типов пульсирующих перемеииых. На рис. 3.1 показано положеиие иекоторых из этих звезд, а также ряда других иа диаграмме Герцшпрунга — Рессела *.

* Необходимые сведения об астрономической терминологии, а также другую информацию можно найти в любом общем курсе астрофизики, например в [16, 261, 462, 528, 564, 595].

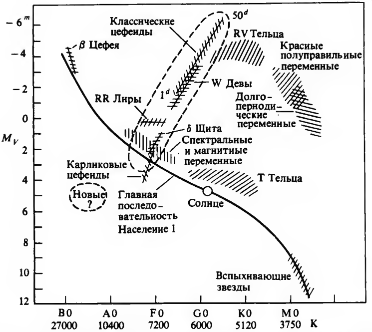


РИС. 3.1. Положение физических переменных звезд различных типов на диаграмме Герцшпрунга — Рессела [133, Fig. 1]. (С разрешения Института физики.)

Классические цефеиды и звезды типа W Девы иногда объединяют общим названием «цефеиды», рассматривая обе группы как аналоги, относящиеся к разным звездным населениям. Красные полуправильные переменные и долгопериодические переменные иногда объединяют общим названием «красные переменные».

Группу звезд в верхней части табл. 3.1 (переменные типа RR Лиры, цефеиды, звезды типа RV Тельца и красные переменные) иногда называют «большой последовательностью переменных звезд». Отметим, что при переходе в этой части таблицы от одних звезд к другим периоды постепенно увеличиваются, а спектральные классы становятся все более поздними (звезды становятся холоднее).

Легко показать, что как раз такую общую корреляцию между периодом и спектральным классом (или цветом) и следует ожидать в случае радиальных пульсаций. Мы можем полагать, что звезды больших размеров имеют и относительно большие периоды (поскольку время прохождения звуковой волны вдоль диаметра такой звезды велико); а при заданной светимости такие звезды относительно холодны. Поэтому, чем больше периоды, тем ниже температуры пульсирующих звезд.

Особенность почти вертикальной овальной области, обведенной на рис. 3.1 штриховой линией, состоит в том, что неустойчивость большинства лежащих в этой области звезд (переменные типа RR Лиры, классические цефеиды, переменные типа W Девы, карликовые цефеиды и переменные типа δ Щита) обусловлена, как считают, действием общего физического механизма (вторая ионизация гелия в звездной оболочке), который будет довольно под-

ТАБЛИЦА 3.1

Пульсирующие переменные

(По данным табл. 1 из обзора [133], с любезиого согласия Иистнтута фнзики.)

Тип звезд	Диапазон периодов	Характерный период	Население	Диапазон спектральных классов	M_V
RR Лиры	1,5 — 24 ч	0,5 сут	II	A2 — F2	От 0,0 до $1,0^m$
Классические цефеиды	1 — 50 сут	5 — 10 сут	I	F6 — K2	От −0,5 до -6^m
W Девы	2 — 45 сут	12 — 20 сут	II	F2 — G6 (?)	От 0 до -3^m
RV Тельца	20 — 150 сут	75 сут	II	G, K	$\approx -3^m$
Красные полуправильиые перемеиные	100—200 сут	100 сут	I и II	(K), M, R, N, S	От −1 до -3^m
Долгопериодические переменные	100—700 сут	270 сут	I и II	M_e, R_e, N_e, S_e	От +1 до -2^m
Типа β Цефея (β Большого Пса)	4 — 6 ч	5 ч	I	B1 — B2	От −3,5 до $-4,5^m$
Карликовые цефеиды и переменные типа δ Щита	1 — 3 ч	2 ч	I	A2 — F5	От +2 до $+3^m$
Цефеиды с биениями (двупернодические цефеиды)	1 — 7 сут	2 сут	I (?)	F0 — G0 (?)	От −1 до -3^m (?)
Переменные белые карлики (звезды типа ZZ Кита)	200 — 1000 с	500 с (?)	I (?)	A5 — F5 (?)	От +10 до $+15^m$ (?)

робно рассмотрен в гл. 10. Эту овальную область иногда называют полосой неустойчивости или областью неустойчивости. Высказано предположение [253, 392, 604], что данная область неустойчивости может простираться даже до переменных белых карликов (или звезд типа ZZ Кита; см. ниже). Однако см. [147].

В работах [52, 366, 441] представлен современный обзор свойств некоторых типов короткопериодических переменных.

Если рассмотреть распределение пульсирующих переменных в Галактике по периодам и учесть эффекты селекции, то при значениях периодов, характерных для различных типов звезд, собранных в табл. 3.1, обнаруживаются более или менее выраженные пики (см., например, [425, p. 17]). Это свидетельствует о том, что классификация пульсирующих звезд на отдельные типы имеет некоторую реальную основу.

Наиболее многочисленным видом пульсирующих переменных, если сравнивать число звезд в единице объема пространства (пространственную плотность), оказываются, по крайней мере в окрестностях Солнца, недавно открытые переменные белые карлики («звезды типа ZZ Кита», [363, 392]). Их число, по-видимому, значительно превышает число переменных звезд всех других типов (быть может, даже более чем в сто раз).

3.1. Классические цефеиды и соотношение период — светимость

Благодаря важности классических цефеид и их роли в установлении фундаментальной шкалы расстояний во Вселенной (с помощью известного соотношения период – светимость) мы посвящаем этому типу переменных отдельный раздел.

Типичным объектом этой группы является звезда δ Цефея с периодом 5,366 сут [316–318]. Еще одна классическая цефеида – Полярная звезда, хотя колебания ее блеска малы ($< 0{,}1^m$). Классические цефеиды – это желтые гиганты и сверхгиганты, имеющие высокую светимость (табл. 3.2) и видимые поэтому на больших расстояниях, если не мешает межзвездное поглощение. Классические цефеиды обнаружены примерно в 30 других галактиках.

Периоды почти всех классических цефеид заключены в диапазоне от 1 до 50 сут, но несколько цефеид в Большом Магеллановом Облаке имеют периоды, достигающие 100 сут, а в Малом Магеллановом Облаке — даже 200 сут [429]. В нашей Галактике классическая цефеида с наибольшим периодом – это звезда BP Геркулеса, ее период равен 83,1 сут [359].

Согласно [431], в нашей Галактике известно около 700 классических цефеид, и все они расположены вблизи галактической плоскости и участвуют во вращении Галактики. Это объекты экстремального населения I. Вследствие близости звезд к галактической плоскости приходящее от них излучение сильно ослаблено из-за поглощения межзвездной пылью и испытывает сильное покраснение. Все эти звезды слишком далеки, чтобы можно было измерить их расстояния обычными прямыми методами (например, методом тригонометрических параллаксов). Поэтому до недавнего времени расстояния до це-

феид определялись только статистическими методами, основанными на закономерностях движения Солнца относительно близких звезд. Такие методы не всегда дают очень точные или надежные результаты. Однако начиная с середины 50-х годов удалось открыть около 13 классических цефеид в рассеянных скоплениях (история их открытия описана в [210]). Это позволило более точно определить расстояния до цефеид (см., например, [231, 310, 433, 479, 480, 483, 484, 489] и ссылки в [484]), а значит, и нуль-пункт соотношения период – светимость (см. ниже).

Некоторые свойства классических цефеид в Галактике суммированы в табл. 3.2 (заимствованной из [133]). Приведенные значения масс — это только оценки, основанные на расчетах звездной эволюции для моделей с обычными массами. Данные оценки, возможно, указывают лишь верхние пределы, поскольку массы реальных цефеид могут быть несколько меньше, чем следует из эволюционных расчетов (разд. 19.7). К сожалению, ни для одной из цефеид нет надежной эмпирической оценки массы, поскольку большинство этих звезд либо одиночные, либо компоненты настолько широких двойных систем, что надежно определить элементы орбит, а следовательно, и массы невозможно (см., например, [2, 325]).

ТАБЛИЦА 3.2

Свойства классических цефеид в Галактике

Параметр	Диапазон
Период П	От 1 до 50 сут
Средняя светимость L	От 300 до 26000 $L_\odot$
Средний спектральный класс	От F5 до G5
Средний радиус R	От 14 до 200$R_\odot$
Масса M	От $\leq 3{,}7$ до $\leq 14M_\odot$

Кривые блеска классических цефеид асимметричны и имеют очень правильную периодичность, точно повторяясь на протяжении многих периодов (рис. 3.2). Амплитуда изменений блеска (в видимом свете) составляет около 1^m, она медленно и несколько нерегулярно возрастает с увеличением периодов.

Форма кривых блеска коррелирует со значениями периодов. Эта корреляция, называемая *зависимостью Герцшпрунга*, показана, например, в [133, Fig. 4] (этот же рисунок можно найти в [424]). (Более подробное обсуждение зависимости Герцшпрунга см., например, в [427, 430].) Отметим, что при периодах между 7 и 9 сут на нисходящей ветви кривой блеска часто появляется вторичный максимум. Следует указать, однако, что зависимость Герцшпрунга носит статистический характер и поэтому имеется много исключений (см., например, [133, Fig. 5]).

Спектральные классы и цвета цефеид также изменяются при колебаниях блеска. В максимуме блеска спектральные классы самые ранние (т.е. ближе

всего к высокотемпературному концу спектральной последовательиостн), н нзменения спектра согласуются с нзменениями цвета. Напрнмер, спектральный класс δ Цефея изменяется в течение периода от F5 до G2 [316]; такое нзмененне соответствует общему измененню эффективной температуры прилнзительно на 1500 К. Бóльшая часть колебаиий блеска обусловлена как раз варнациями температуры, а нзменення радиуса сравнительно невеликн (относительная полуамплитуда составляет около 0,05 – 0,10, см., например, [394]) н оказывают лишь незначительное влияние на кривые блеска.

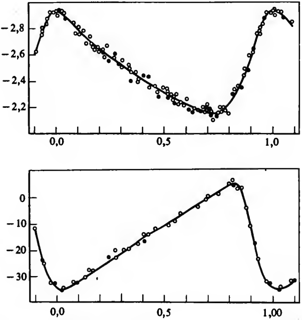


РИС. 3.2. Кривые блеска (вверху) и лучевых скоростей (виизу) для звезды δ Цефея. Абсцисса — фаза; ордииата для кривой блеска — видимая звездная величииа (нуль-пункт произвольный). Лучевая скорость выражена в км/с н прнведена без учета скорости движеиия центра масс звезды относнтельно Солнца, равной −16 км/с (знак скорости берется в соответствии с обычиыми астрономнческнми правилами) [236].

Крнвые лучевых скоростей классических цефеид являются прнблизительно зеркальиым отражеинем крнвых блеска (еслн нспользовать обычные астрономические правила для знака лучевой скоростн), что н показано на рнс. 3.2 [133]. Если кривая лучевых скоростей отображает двнжение звездной поверхностн, то фазовое соотношенне между изменениями блеска и лучевой скоростн означает, что звезда наиболее яркая тогда, когда она, расширяясь, достигает равновесного радиуса, а не тогда, когда ее радиус наименьший, как можно было бы ожидать нз прнмитивиых рассуждений. Это отставаине фазы

максимального блеска относительно фазы минимального радиуса было названо «фазовым запаздыванием». Фазовое запаздывание максимума светимости отиосительио мииимума радиуса составляло бы около 90°, если бы кривые блеска и лучевой скоростн были синусоидальными. Однако из-за асимметрии кривых фазовое запаздывание значительно меньше и составляет, по-видимому, 0,1 – 0,2 периода. Физическая природа фазового запаздывания прояснилась в последние годы и будет рассмотрена в гл. 11.

Амплитуда изменеиий лучевых скоростей обычно составляет 30 — 40 км/с, причем оиа медленно н нерегулярно увелнчивается с ростом периода, достигая около 50 — 60 км/с для П $\approx$ 30 — 40 сут. Отметим, что из-за эффектов проекции и потемнения к краю истинные амплитуды изменений радиальной скорости больше приведеииых значеиий, и последние следует умножить на некоторый коэффициент, обычно принимаемый равным 24/17 (разд. 3.4).

Пожалуй, наиболее важная роль классических цефеид в астрономии заключается в их нспользовании как эффективных индикаторов расстояний; эти звезды все еще обеспечивают наиболее надежный метод построеиия фундаментальной шкалы расстояний во Вселенной [478, 481]. Их использование осиовано на хорошо известном соотношении период— светимость, которое было открыто в 1912 г. Ливнтт при изучении цефеид Малого Магелланова Облака [445]. Ливитт установила, что средняя светимость моиотонно возрастает с

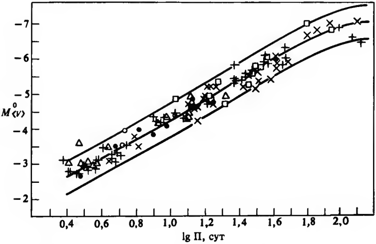


РИС. 3.3. Комбинированное соотношение период — светимость Сэндейджа и Таммана [479]. Соотношенне осиовано на данных о цефеидах в нашей и других галактиках. (С любезного согласия редакцнн «Астрофнзнкел Джорнел» и авторов.) Черные кружки — цефеиды рассеянных скоплений, белые кружкн — h н χ Персея, прямые крестикн — Большое Магелланово Облако, косые крестикн — Малое Магелланово Облако, треугольнники — туманность Андромеды М31, квадратки — галактика NGC 6822.

увеличеиием периода, однако ей ие удалось определить иуль-пункт данной зависимости. История определеиия зтого нуль-пункта представляет захватывающую главу в истории астроиомии, оиа описаиа в работах [27, 28, 210]. Достаточио сказать, что исправлеиие ошибки в первых определениях нуль-пункта, обиаружеиной Бааде в иачале 1950-х годов с помощью вступившего в строй 5-метрового Паломарского телескопа, привело к «удвоеиию» размеров Вселеииой: зта ошибка оставалась иеобиаружеииой в течеиие почти сорока лет! Проблема нуль-пункта, иесомиеиио, является одиой из самых осиовиых проблем иаблюдательиой астрофизики из-за ее важиости для установлеиия шкалы астроиомических расстояиий.

Современиый анализ змпирического соотиошеиия период-светимость представлеи в работах [208, 229, 231, 433, 479, 480, 482–484, 489, 601]. На рис. 3.3 [133] показаио соотиошеиие период-светимость Сэидейджа и Таммана [479]. Приведеииая зависимость является комбииированиой, оиа осиоваиа иа даииых о цефеидах как иашей, так и других галактик. Авторы пришли к выводу, что иет иикаких осиований сомиеваться в существовании «уииверсальиого» соотиошеиия период – светимость по крайией мере для изучеииых ими галактик. Одиако вопрос об уииверсальиости такого соотиошеиия, по-видимому, еще иельзя считать окоичательио решеииым (см., иапример, [210, 230]).

Хотя соотиошеиие период – светимость Сэидейджа и Таммаиа иелииейиое, отклоиеиия от лииейиости довольио малы. Линию в цеитре полосы, показаииой иа рис. 3.3, можио почти по всей ее длиие с достаточиой точиостью представить следующим соотиошеиием:

$$M^0_{\langle V\rangle} = -2{,}80 \lg \Pi_d - 1{,}43 \qquad (0{,}4 \le \lg\Pi_d \le 1{,}7), \tag{3.1}$$

где иидекс $\langle V\rangle$ озиачает «средиее по периоду», а верхиий иидекс иуль указывает, что абсолютные величииы исправлеиы иа межзвездиое покрасиеиие и поглощеиие. Периоды выражеиы в сутках, что отмечеио иидексом d. Используя полученную Крафтом [310] зависимость между $M_{\langle V\rangle}$, показателем цвета $(B - V)$, T_e и $M_{\rm bol}$, соотиошеиие (3.1) можио представить еще и в следующем виде:

$$\lg(L/L_\odot) = 1{,}15 \lg\Pi_d + 2{,}47 \qquad (0{,}4 \le \lg\Pi_d \le 1{,}7). \tag{3.2}$$

Разброс точек отиосительио центральиой лииии иа рис. 3.3, вероятио, в большинстве случаев реальиый и связан с коиечиой шириной области иеустойчивости, а также, возможио, с иаличием звезд, пульсирующих в различиых модах (см. гл. 10 и разд. 19.7). Для фиксироваииого периода полиая реальиая ширина зависимости период – светимость составляет приблизительио 1^m.

По-видимому, существуют определеииые различия между цефеидами в Галактике и в Магеллановых Облаках. Пожалуй, иаиболее сильиыми являются различия в распределеиии цефеид в этих системах по периодам. Так, иапример, в Малом Магеллановом Облаке есть много цефеид с $\Pi \le 3$ сут, тогда как в Галактике известио лишь иесколько цефеид с такими короткими пе-

риодами. В зтом отношенни цефеиды Большого Магеллаиова Облака заинмают промежуточное положение (см., например, сводку данных в статье [278]).

3.2. Новые типы переменных звезд

Кроме тнпов переменных звезд, упомянутых выше, значнтельное виимание в астрономнческой н астрофнзнческой лнтературе было уделеио в последиее время еще по крайней мере трем типам. Кроме того, благодаря иовым открытиям число известных объектов заметио возросло. Поэтому мы дадим здесь краткое описание этих типов н прнведем некоторые библиографическне ссылкн.

3.2а. БЫСТРЫЕ ГОЛУБЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Быстрые голубые переменные – зто довольно шнрокий класс сравннтельно голубых объектов с очень короткопериодическими измеиениями блеска. Изменеиия блеска большей частью весьма неправнльные н напоминают «мерцання». Перноды колебаний блеска составляют от иескольких десятков до нескольких сотен секунд. Данные наблюденнй этнх объектов суммироваиы в работах [53, 392, 410, 423, 456 – 458, 551, 615 – 617]. В большинстве своем эти объекты, по-видимому, – либо карликовые иовые (которые, как счнтают, являются теснымн двойнымн, см., напрнмер, [311, 312, 423, 614]), лнбо переменные белые карлики [253, 364, 365, 392, 451, 456 – 458, 604]. Как отметнл Мак-Гро [363], перемеииые белые карлики представляют нанболее миогочисленную группу переменных звезд, н этот новый класс он назвал «звездами тнпа ZZ Кнта». Прнрода нескольких быстрых голубых переменных, которые ие входят ни в одну из упомяиутых групп, остается иевыясненной [43, 321]. Например, одним нз возможиых объясиений может быть быстрое вращение этих объектов [266, 321].

Согласио [363, 392], в настоящее время известиы 12 переменных белых карлнков с периодамн преимущественно в диапазоне 200 – 1000 с, причем по остальиым характеристикам это обычные белые карлнки тнпа DA с показателями цвета в областн $0{,}16 \leqslant B - V \leqslant 0{,}20^m$ (т.е. с эффективиыми температурами $\sim 10^4$К). Дополнительные сведення об этих звездах можио иайти в [147, 253, 363, 392, 604] н в некоторых из работ, цитированиых выше.

3.2б. ЦЕФЕИДЫ С БИЕНИЯМИ

Цефеиды с биеннями (или двупериодические цефеиды; возможно, нх вообще нельзя относить к цефеидам) образуют небольшую группу звезд, крнвые блеска которых ие являются перноднческими (в настоящее время известиы 11 такнх звезд [557]). Тем не менее зти крнвые блеска удается разложить, по существу, на две (в одном нли двух случаях – иа три) периодические крнвые. Сложенне двух такнх кривых виовь дает первоначальиую наблюдаемую непе-

риодическую кривую блеска. Предполагают, что оба периодических процесса представляют собой две различные моды пульсаций, которые соответствуют, как считают обычно, радиальным колебаниям в основной моде и первой гармонике, а если выделяется еще один период, то и во второй гармонике. Очевидно, что по какой-то причине в рассматриваемых звездах одновременно возбуждены все эти моды, которые взаимодействуют друг с другом и поэтому вызывают «биения». Наибольший из периодов обычно составляет от 2 до 7 сут, следующий – около 70% от него, а третий, если он имеется, - около 80% от второго. Быть может, важно то, что отношение второго периода к первому ни в одном случае не выходит за пределы 0,70—0,71 [519, 557]. На диаграмме Герцшпрунга – Рессела эти звезды лежат в нижней части полосы неустойчивости цефеид (вытянутая овальная область на рис. 3.1). Именно по этой причине их называют «цефеидами». Согласно [557], в нашей Галактике приблизительно половина переменных с соответствующими периодами является цефеидами с биениями.

Мультипериодичность этих звезд позволяет получить важную информацию о рассматриваемых объектах и о некоторых свойствах звездных пульсаций вообще. Дело в том, что для заданной моды период определяется в основном массой и радиусом звезды (см., например, [103, 151]). Цефеидам с биениями посвящены работы [104 – 106, 114, 119, 122, 124, 206, 207, 217, 220, 301, 438, 439, 442, 460, 477, 494, 555, 556, 558]; см. также обзорные статьи [115, 138, 139] и ссылки в них.

3.2в. ЗВЕЗДЫ КЛАССА B С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРОФИЛЯМИ ЛИНИЙ

Эти звезды, названные М.Смитом [533, 534] «звездами типа 53 Персея», в основном находятся на главной последовательности или вблизи нее и имеют ранние спектральные классы, скажем от O8 до B5. Однако некоторые из этих звезд являются гигантами или сверхгигантами и занимают часть диаграммы Герцшпрунга – Рессела вокруг и в окрестности звезд типа β Цефея. Звезды класса B с переменными профилями линий довольно многочисленны, к этой группе относится, вероятно, большинство звезд в соответствующей области диаграммы Герцшпрунга – Рессела [533].

У этих звезд обнаруживаются изменения профилей спектральных линий со временем, происходящие более или менее периодическим образом, и периоды обычно составляют от нескольких часов до приблизительно 2 сут (характерное значение 0,5 сут). Изменения профилей спектральных линий можно объяснить нерадиальными колебаниями, в частности g-модами [531 - 534, 536, 537] (см. терминологию в гл. 17). Имеется свидетельство довольно частых изменений характера колебаний, причем определенный тип колебаний сохраняется, как правило, примерно в течение месяца [534].

У нескольких звезд этого типа были обнаружены также колебания блеска порядка $0,1^m$ [59, 535]. В работе [59] проведено и довольно изящное рассмотрение изменений блеска, сопровождающих нерадиальные звездные колебания (см. также [191]).

3.3. Эмпирическое определение радиусов пульсирующих звезд

Большинство эмпирических методов определения радиусов радиально пульсирующих звезд базируется, по существу, на методе, разработанном Бааде [25] и Весселинком [619, 620]. Суть метода заключается в следующем. Если F_ν – поток, излучаемый в некоторой спектральной полосе шириной обычно $\sim$ 700 — 1000 Å (т.е. интенсивность излучения энергии с единицы площади поверхности), а L_ν – светимость звезды в этой области спектра, то для каждого момента времени существует простая зависимость между F_ν, L_ν и мгновенным радиальным расстоянием R того эффективного уровня в атмосфере, на котором возникает излучение в заданной области спектра (R приблизительно равно мгновенному радиусу звезды). Самое существенное предположение, лежащее в основе метода Весселинка, состоит в том, что для данной звезды поток F_ν считается зависящим только от цвета звезды, характеризуемого показателем цвета $B - V$. Здесь B и V – это исправленные на межзвездное покраснение видимые звездные величины в широких спектральных областях с центрами соответственно в голубой и визуальной (желто-зеленой) областях спектра. Если теперь выбирать две фазы в цикле пульсаций, скажем, для моментов t_1 и t_2, когда цвет звезды одинаков, т.е. $(B - V)_1 = (B - V)_2$, то, согласно основному предположению, $F_\nu(t_1) = F_\nu(t_2)$. А отсюда следует, что

$$L_1/L_2 = (R_1/R_2)^2, \tag{3.3}$$

где индексы 1 и 2 соответствуют моментам t_1 и t_2. Таким образом, измерение относительного блеска звезды в двух фазах, когда цвет одинаков, дает оценку отношения радиусов звезды для двух моментов времени.

С другой стороны, если известна *кривая лучевых скоростей*, то скорость движения звездной поверхности, скажем $\dot{R}(t)$, относительно центра масс звезды можно получить сразу после того, как выбран поправочный множитель p для перехода от наблюдаемой лучевой скорости $V(t)$ (относительно центра масс) к $\dot{R}(t)$:

$$\dot{R}(t) = -pV(t). \tag{3.4}$$

Предполагая, что средний уровень в атмосфере, соответствующий кривой лучевых скоростей, совпадает со средним уровнем, на котором формируется поток выходящего излучения, легко найти разность $R_2 - R_1$, проинтегрировав кривую лучевых скоростей от момента t_1 до момента t_2.

А зная разность $R_2 - R_1$ и отношение R_1/R_2, легко определить и сами величины R_1 и R_2. Повторяя эту процедуру для всего периода, можно найти $R(t)$, откуда определяется средний радиус R.

Метод Весселинка многократно применялся, обсуждался и уточнялся, мы приведем здесь лишь несколько сравнительно новых ссылок [95, 116, 120, 205, 209, 268, 291, 400, 401, 421, 422, 459, 493]; см. также библиографию в [209]. Рассмотрение других методов определения радиусов пульсирующих звезд можно найти, например, в работах [105, 420. 421].

Проведенные исследования показывают, что предположения, лежащие в основе обычного метода Весселинка, по-видимому, не всегда строго выполняются [493]. Различные метода определения радиуса дают, как правило, различные результаты. Очевидно, что радиусы пульсирующих звезд известны довольно плохо, скажем с точностью не выше 10 или 20% (см., например, [105, 151]). С нетерпением ожидаются предстоящие прямые интерферометрические измерения углового диаметра цефеид, см. [250].

Применение метода Весселинка к звездам, испытывающим нерадиальные колебания, рассматривается в работе [40].

3.4. Потемнение к краю и скорость радиального расширения звезды

Изменения лучевой скорости, определяемые по доплеровскому смещению спектральных линий, в силу ряда причин не дают прямой информации об истинной скорости расширения или сжатия поверхности пульсирующей звезды. Наиболее важная поправка, которую необходимо внести, чтобы на основе наблюдаемых доплеровских смещений определить истинную скорость движения звездной поверхности относительно центра масс звезды, заключается в учете эффектов проекции и потемнения к краю. Эти эффекты, а также дифференциальные движения слоев в тех областях конечной толщины, где образуются линии поглощения, как правило, вносят асимметрию в наблюдаемые профили линий и поэтому могут влиять на положение «центра тяжести» линии, а потому и на наблюдаемую лучевую скорость. Мы рассмотрим здесь только эффекты проекции и потемнение к краю, предполагая, что излучающая область ведет себя по крайней мере с кинематической точки зрения как некоторая твердая сферическая поверхность, реальная скорость движения которой относительно центра масс звезды равна $V \equiv \dot{R}$ (величина V здесь иная, чем в разд. 3.3). Влияние дифференциальных движений в излучающих областях на профили линий исследовано, например, в работах [186, 291, 373].

Будем предполагать, что «центр тяжести» спектральной линии соответствует среднему значению, взятому по видимому звездному диску, от скорости вдоль луча зрения: $V_r = V\cos\theta$, где V — истинная радиальная скорость излучающей области, а θ — угол между вектором $\mathbf{V}$ и лучом зрения. При нахождении среднего значения необходимо учесть *функцию потемнения к краю* $\phi(\theta)$. Эту функцию выбирают таким образом, что $\phi(\theta) = 1$ при $\theta = 0$, а с увеличением θ ее значения убывают. Принимая

$$\phi(\theta) = 1 - k + k\cos\theta \quad (k \leqslant 1), \tag{3.5}$$

мы легко получаем

$$\overline{V}_r = V\cdot(4 - k)/(6 - 2k). \tag{3.6}$$

Для $k = 0, 3/5$ и 1 имеем соответственно $\overline{V}_r / V = 16/24,\ 17/24$ и $18/24$. Эти три значения k соответствуют отсутствию потемнения к краю, потемнению, предсказываемому простой серой атмосферой в приближении Эддингтона (см., например, [372, 629]), и полному потемнению к краю. Очевидно, что закон

потемнения к краю не слишком влияет на значение $\overline{V}_r / V$, по крайней мере в принятой нами простой модели. Данное обстоятельство и объясняет, почему для величины $p = V/\overline{V}_r$ (разд. 3.3) обычно используют значение 24/17. Оценки p, полученные на основе более сложных моделей, приведены, например, в работах [116, 291, 420, 421]; но эти более точные значения ненамного отличаются от полученных в простых моделях, упомянутых выше (например, согласно [420], значение p равно 24/17,5).

Можно отметить, что поскольку разные спектральные области в общем случае дают различное потемнение к краю, то уже по одной этой причине различные линии могут дать несовпадающие лучевые скорости. Дифференциальные движения излучающих слоев также могут вызвать расхождения в наблюдаемых лучевых скоростях, определяемых по различным спектральным линиям (например, по сильным и слабым линиям, образующимся соответственно в верхних и нижних слоях атмосферы). Обычно для окончательного определения лучевой скорости усредняют результаты, полученные по нескольким спектральным линиям.

Влияние нерадиальных колебаний звезд на спектральные линии было рассмотрено Осаки [405] и Дзембовским [191]. См. также работы [59, 531, 532, 535, 537].

ГЛАВА 4
НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе мы приведем в довольно общем виде некоторые из основных уравнений гидродинамики (с учетом переноса тепла), характеризующих поведение сплошной среды. Затем эти уравнения будут переписаны применительно к нескольким интересующим нас частным случаям. Мы также выведем «интегральную» теорему, относящуюся к системе в целом: теорему энергии.

Как правило, мы не будем приводить детальных выводов, поскольку их можно найти в учебниках гидродинамики и астрофизики. Если специально не оговорено, то всегда будет использоваться ряд физических упрощений. Наиболее важные из них таковы. Пространство считается евклидовым, т.е. плоским (см., например, [375]), и поэтому всегда можно ввести декартову ортогональную систему координат, охватывающую в пространстве любую область желаемого размера. Предполагается также, что масса сохраняется, т.е. что все материальные скорости малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Наконец, считается справедливой ньютоновская теория тяготения (в противоположность общей теории относительности).

В качестве справочника по излагаемым здесь вопросам подходят любые хорошие учебники по гидродинамике и теоретической астрофизике. Автор считает особенно полезными статью Леду и Вальравена [345, §43 — 54] и книги Росселанда [465], Ландау и Лифшица [323], Милна-Томсона [374] и Бэтчелора [42].

4.1. Представления Эйлера и Лагранжа

Рассмотрим газообразную или жидкую среду и будем считать ее непрерывной. Тем самым предполагается, что все элементы среды, с которыми мы имеем дело, пусть даже бесконечно малые в математическом смысле, достаточно велики, чтобы содержать большое число атомов или молекул. Поведение такой среды описывается двумя способами: в *представлении Эйлера* и в *представлении Лагранжа*.

В представлении Эйлера все физические характеристики среды, такие, как скорость $\mathbf{v}$, полное давление P, плотность ρ, температура T и т.д., рассматриваются как переменные пóля, т.е. как функции положения $\mathbf{r}$ и времени t. Величины $\mathbf{r}$ и t считаются независимыми переменными. В заданной декартовой системе координат вектор $\mathbf{r}$ может иметь, например, компоненты x, y, z (или, в более общем виде, x_1, x_2, x_3). Важно осознать, что эйлерова переменная положения $\mathbf{r}$ характеризует не положение произвольного элемента среды, а положение точки наблюдения. Ясно, что эту переменную можно произвольным образом изменять независимо от времени t. (Некоторой аналогией может служить отверстие, просверленное в заборе для того, чтобы следить за находящейся по другую сторону «сплошной средой»; $\mathbf{r}$ — это положение отверстия в заборе.) Следовательно, дифференцирование по времени эйлеровой переменной положения $\mathbf{r}$ является, вообще говоря, бессмысленным, если не сделать некоторых оговорок или пояснений.

Однако часто бывает интересно проследить движение выделенного элемента жидкости и (или) наблюдать скорость изменения некоторого физического параметра, связанного с элементом, такого, как плотность. Производную по времени, характеризующую изменения, происходящие с выделенным элементом при его движении, иногда называют *субстанциональной* производной (или *материальной*, или *стоксовой*), и в настоящей книге она обычно будет обозначаться как d/dt (в литературе иногда используют обозначение D/Dt). Поскольку переменные $\mathbf{r}$ и t формально считаются независимыми, при образовании субстанциональной производной от некоторой величины $f(\mathbf{r}, t)$ должно выполняться следующее операторное соотношение:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \tag{4.1}$$

где ∇ — обычный оператор градиента *, а скорость жидкости определяется формулой

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}. \tag{4.2}$$

Из самого понятия скорости ясно, что $\mathbf{r}$ в последних равенствах в (4.2) — это уже не эйлерова, а лагранжева пространственная координата (см. следующий абзац), которая характеризует мгновенное положение рассматриваемого нами выделенного элемента.

---

* Можно показать, что нахождение градиента от некоторой величины эквивалентно нахождению *ковариантной производной* от этой величины; см., например, [362].

В представлеиии Лагранжа прослежнвают движеиие задаииого элемеита жидкости, поэтому не всегда можио произвольио выбрать точку иаблюдеиия. В этом представлеиии вектор $\mathbf{r}$ характериэует положение иекоторого выделеииого элемеита жидкости и, следовательио, больше ие является иезависимой переменной. Напротив, величииа $\mathbf{r}$ — функция времеии и (в трехмериом простраистве) трех характернэующих даный элемеит параметров, скажем a_1, a_2, a_3. Если a_1, a_2, a_3 — компоиеиты радиуса-вектора, скажем $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, который совпадал с $\mathbf{r}$ в момеит, скажем $t = 0$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, где $\mathbf{r}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}$. В представлении Лаграижа жидкость рассматривается как совокупиость большого числа отдельиых материальиых точек. Движеиия таких материальиых точек н нсследуются, и эта задача до иекоторой степеии сходиа с задачей миогих тел в классической механике. Одиако в представлеиин Лагранжа величииы a_i ие обязательио должиы быть простраиствениым координатами. При иаличии одиой степеии свободы (одиомериое простраиство) величииа a может быть некоторым фнэнческим параметром элемента, иапример его температурой в иекоторый задаиный момеит времеии нлн, например, его массовой координатой при иаличии сферической снмметрин (см. иrже гл.6, или любую киигу по виутреииему строеиию эвеэд, иапример [146, Ch. 1]).

Связь между представлениями Эйлера и Лагранжа дается соотиошеиием (4.2). Если $\mathbf{v}$ — известиая функция $\mathbf{r}$ и t, то (4.2) —это диффереициальное уравиеиие, которое можио решить, по крайией мере в приицsmall, отиосительио радиус-вектора $\mathbf{r}$ выделениого элемеита жидкости, т.е. иайти $\mathbf{r}$ как функцию времеии t, используя при этом величииы a_i для идеитификации рассматриваемого элемеита $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t)$. (Для иаглядности можио представнть себе, что в момеит t сделан «момеитальиый сиимок» жидкостн. В общем случае в этот момеит в каждой точке $\mathbf{r}$ будет находнться некоторый элемеит жидкости, и величина $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ дает мгновениую скорость зтого элемеита. Уравненне (4.2) примеиимо для каждого элемеита жидкости в отдельиости. Поэтому соотиошеиие $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t)$ описывает положеиие каждого злемеита как функцию времени.)

Таким образом, в представлеиии Лаграижа величииа $\mathbf{r}$ оказывается зависимой перемеииой, а иезависимыми перемеииыми являются a_i и t. Поэтому все фнэические велнчииы следует рассматривать как функции от a_i и t. Субстаициоиальиую производиую в этом представлеиии можио записать просто как $\partial/\partial t$:

$$(d/dt)_{\text{Эйлера}} = (\partial/\partial t)_{\text{Лагранжа}}. \tag{4.3}$$

В общем случае в задачах с более чем одиой степенью свободы (пространство более одного нэмерення) представление Эйлера более удобно, чем лагранжево. Однако в задачах с одиой степеиью свободы (например, при иаличии сферической симметрии) представление Лагранжа обычно предпочтительиее. Осиовиая причииа заключается в том, что в представлеиии Лаграижа физическая иитерпретация уравиенний более поиятиа и более иепосредствеииа, чем в представлеинн Эйлера. Кроме того, сами уравиеиия часто оказываются проще. Поэтому когда мы будем иметь дело с общими уравиеииями и

теоремами в трехмериом простраистве, то будем обычно использовать представление Эйлера, а при рассмотреиии одиомериых задач — представлеиие Лаграижа.

4.2. Уравнения сохранения массы импульса и энергии

4.2а. СОХРАНЕНИЕ МАССЫ

Мы рассмотрим здесь уравиеиия, выражающие сохраиеиие массы, сиачала в представлеиии Эйлера, а затем в представлеиии Лаграижа.

В представлеиии Эйлера прииципсохраиения массы обычио формулируется как *уравнение неразрывности*:

$$\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{4.4}$$

где ρ — плотность *. Отметим, что величииа $\rho\mathbf{v}$ — это плотиость потока массы.

В уравиении (4.4) можно раскрыть скобки и использовать осиовиое операториое соотиошеиие (4.1). Тогда имеем альтериативную форму уравиеиия иеразрывиости

$$(1/\rho)\, d\rho/dt = -\nabla\cdot\mathbf{v}. \tag{4.5}$$

Далее, можио ввести удельиый объем $V \equiv 1/\rho$ (объем единицы массы жидкости), и тогда уравиеиие (4.5) преобразуется к виду

$$(1/V)\, dV/dt = \nabla\cdot\mathbf{v}. \tag{4.6}$$

Даиое уравиеиие показывает, что величииа $\nabla\cdot\mathbf{v}$ — это просто скорость отиосительиого увеличеиия объема фиксироваииой массы жидкости, когда эта масса движется.

Несжимаемая жидкость — это жидкость, плотиость которой при движеиии не изменяется. Таким образом,

$$d\rho/dt = 0, \quad \text{откуда} \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{4.7}$$

Можио показать также (см., иапример, [374]), что прииципсохранеиия массы можно выразить в следующей форме:

$$d(\rho d\tau)/dt = d(dm)/dt = 0, \tag{4.8}$$

где $d\tau$ и dm — элемеит объема и элемеит массы соответствеино. Следовательио, если масса сохраняется, то оператор d/dt, действующий иа любой интеграл по объему, такой, как ниже в уравнеиии (4.9), может быть виесеи под зиак иитеграла и примеиеи к члеиу (или члеиам), умиожаемому иа величииу $\rho d\tau$. Таким образом,

$$(d/dt)\int\limits_{V(t)}(A\rho)d\tau = \int\limits_{V}(dA/dt)\rho d\tau = \int\limits_{M}(dA/dt)dm, \tag{4.9}$$

* Еслн не сохраняется масса, то это уравненне не выполняется. Однако еслн сохраняется чнсло барнонов (см., напрнмер, [573]), то уравненне все же справедлнво прн условнн, что велнчнна ρ формально означает концентрацню барионов.

где $dm \equiv \rho d\tau$, объем $V(t)$ по определению всегда содержит фиксированное, хотя и произвольное количество жидкости, т.е. объем $V(t)$ изменяет в соответствии с движением свои размеры и форму. Величина A — это любая конкретная физическая величина, отнесенная к единице массы, она может быть скаляром, вектором или тензором. Величина M в последнем интеграле — полная масса, заключенная в объеме $V(t)$. В связи с принятым определением V уравнение (4.9) в некоторых задачах следует использовать с осторожностью, например в задачах аккреции вещества или потери массы звездами.

Чтобы сформулировать принцип сохранения массы в представлении Лагранжа, удобно рассмотреть выражение для лагранжевой пространственной координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ для каждого элемента массы как выражение, представляющее непрерывное преобразование переменных. Данное соотношение определяет положение частицы жидкости в момент t, причем в момент $t = 0$ положение этой частицы описывалось вектором $\mathbf{a}$. Если предположить, что оба вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ можно разложить на компоненты в фиксированной декартовой системе координат, то мы получим следующую «интегральную» форму уравнения сохранения массы в лагранжевом представлении (см., например, [345, §44], где рассмотрен более общий случай криволинейных координат):

$$\rho(\mathbf{a}, t)\, J\,(\mathbf{r}[\mathbf{a}, t]) = \rho_0, \tag{4.10}$$

где ρ_0 — локальная плотность жидкости в момент $t = 0$, т.е. $\rho_0 \equiv \rho(\mathbf{a}, 0)$. Величина J — это *якобиан* преобразования:

$$J\,(\mathbf{r}[\mathbf{a}, t]) \equiv |\partial x_j/\partial a_k| \qquad (j, k = 1, 2, 3). \tag{4.11}$$

Отметим, что J — функция от $\mathbf{r}$, а $\mathbf{r}$ в свою очередь — функция от $\mathbf{a}$ и t. Поэтому при движении частиц жидкости J непрерывно изменяется со временем, причем в момент $t = 0$ $J = 1$.

Если взять от обеих частей уравнения (4.10) субстанциональную производную по времени, то мы получим «дифференциальную» форму уравнения сохранения массы. Предполагая $J \neq 0$ (что должно выполняться в любом случае, чтобы компоненты a_i можно было выразить через x_i), получим в результате соотношение, представляющее величину $\dot\rho$ как функцию от $\dot J$, где точки над символами обозначают субстанциональные производные. Используя понятие скорости жидкости $\mathbf{v} = \partial\mathbf{r}/\partial t = \dot{\mathbf{r}}$ и само понятие определителя, легко показать, что

$$\dot J = J \sum_i \partial v_i/\partial x_i = J\nabla\cdot\mathbf{v}. \tag{4.12}$$

Учитывая этот результат в соотношении между $\dot\rho$ и $\dot J$, получаем

$$\dot\rho/\rho = -\nabla\cdot\mathbf{v}, \tag{4.13}$$

что в точности совпадает с уравнением (4.5), записанным в представлении Эйлера. Хотя последний результат был получен в предположении, что векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ разложены на компоненты в фиксированной декартовой системе координат, уравнение (4.13), очевидно, должно выполняться в любой системе координат.

4.2б. СОХРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Принцип сохранения импульса — это, по существу, второй закон Ньютона в применении к сплошной среде. Уравнение сохранения импульса мы рассмотрим сначала в представлении Эйлера, а затем в представлении Лагранжа. Это уравнение иногда называют уравнением движения.

В представлении Эйлера уравнение имеет вид

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla\cdot\mathbb{P} + \rho\mathbf{f}, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости (импульс на единицу массы), $\mathbf{f}$ — суммарная объемная или внешняя сила на единицу массы, а $\mathbb{P}$ — ***тензор напряжений***, обычно принимаемый симметричным (чтобы сохранялся момент количества движения, см., например, [374]). (Мы используем здесь обозначения тензорной алгебры, см., например, [185; 387, §1.6; 444].)

При выводе уравнения (4.14) предполагается, что масса сохраняется. Уравнение движения можно записать и в виде, не требующем выполнения этого условия, а именно (см., например, [345, §49])

$$\partial(\rho\mathbf{v})/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbb{P}) = \rho\mathbf{f}. \tag{4.15}$$

Это — консервативная форма уравнения сохранения импульса. Величину в скобках во втором слагаемом в левой части иногда называют «плотностью потока импульса», поскольку при отсутствии объемных сил ($\mathbf{f} = 0$) скорость уменьшения импульса (пространственная плотность которого составляет $\rho\mathbf{v}$) в фиксированном объеме жидкости равна полному потоку импульса $\int(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbb{P})\cdot\mathbf{n}\,dS$ через поверхность S, ограничивающую заданный объем жидкости ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S).

Если напряжения сводятся к чистому гидростатическому давлению, как это имеет место в большинстве интересующих нас приложений, то тензор напряжений имеет вид

$$\mathbb{P} = P\mathbb{I}, \tag{4.16}$$

где P — гидростатическое давление, а $\mathbb{I}$ — единичный тензор. Тогда сила, обусловленная напряжениями и действующая на элемент площади dS с внешней нормалью $\mathbf{n}$, равна $-P\mathbf{n}dS$, т. е. равна силе, направленной вдоль внутренней нормали к dS, а значит, чистому давлению. В этом случае уравнения (4.14) и (4.15) принимают вид

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla P + \rho\mathbf{f} \tag{4.17}$$

и

$$\partial(\rho\mathbf{v})/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + P\mathbb{I}) = \rho\mathbf{f}. \tag{4.18}$$

Если жидкость покоится ($\mathbf{v} \equiv 0$) и находится в гидростатическом равновесии, то ускорение частиц отсутствует и (4.17) сводится к уравнению гидростатического равновесия

$$\nabla P = \rho\mathbf{f}. \tag{4.19}$$

Эффекты турбулентности, вязкости или, например, крупномасштабных магнитных полей можно обычно описать с помощью тензора напряжений (см., например, [146, 345]).

В представлении Лагранжа независимыми переменными являются параметры a_i и время t, а не $\mathbf{r}$ и t. Поскольку $P = P(a_1, a_2, a_3, t)$, в декартовой системе координат мы должны записать

$$\nabla P = \sum_i \mathbf{e}_i \, \partial P/\partial x_i = \sum_{ij} \mathbf{e}_i \, (\partial a_j/\partial x_i) \, \partial P/\partial a_j = \sum_j (\nabla a_j) \, \partial P/\partial a_j,$$

так что уравнение (4.17) примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -(1/\rho) \sum_j (\nabla a_j) \partial P/\partial a_j + \mathbf{f}, \tag{4.20}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, а точка обозначает субстанциональную производную. Это и есть соответствующее уравнение движения в представлении Лагранжа, если напряжения сводятся к чистому давлению. Отметим, что данное уравнение, вообще говоря, довольно сложное.

Простой пример уравнения (4.20) для одной степени свободы (одномерный случай) будет рассмотрен в гл. 6.

4.2в. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Закон сохранения энергии, следуя [345, § 50—52], удобно рассмотреть в трех вариантах: *для механической энергии; тепловой и механической энергии вместе* и *только тепловой энергии.*

Уравнение, описывающее сохранение механической энергии, можно получить из уравнения импульса (4.14) в представлении Эйлера, разделив все члены на ρ и умножив обе части скалярно на $\mathbf{v}$:

$$d(v^2/2)dt = -(1/\rho)\mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathbb{P}) + \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}, \tag{4.21}$$

где $v^2 \equiv \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$. Уравнение (4.21) просто устанавливает, что скорость изменения со временем кинетической энергии на единицу массы $v^2/2$ равна мощности объемных сил и сил, обусловленных наличием градиента давления (или дивергенции тензора напряжений), приходящейся на единицу массы.

Уравнение (4.21) можно записать и в другой форме, если использовать в правой его части следующее тождество:

$$\nabla\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbb{P}) = \mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathbb{P}) + \mathbb{P}:(\nabla\mathbf{v}), \tag{4.22}$$

где двоеточие в последнем члене означает операцию двойного скалярного произведения, т.е. свертки двух тензоров (см., например, [309, 444]). Умножая преобразованное таким образом уравнение (4.21) на $\rho d\tau = dm$, интегрируя по всему объему V жидкости массой M, применяя к первому интегралу в правой части теорему Гаусса — Остроградского (см., например, [444]), предполагая, что при этом сохраняется масса, и пренебрегая результирующим по-

верхностиым ннтегралом, получим теорему сохранеиия механической эиергин в интегральиой форме:

$$d/dt \int\limits_M \tfrac{1}{2}v^2\, dm = \int\limits_V \mathbb{P} : (\nabla \mathbf{v}) d\tau + \int\limits_M \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dm. \tag{4.23}$$

Нлже в разд. 4.6 будет приведена другая формулнровка этой теоремы для случая, когда единствеиной действующей снлой $\mathbf{f}$ является сила гравнтации.

Пренебрежеиие поверхностиым интегралом оправдано тогда, когда $(\mathbf{v} \cdot \mathbb{P}) \cdot d\mathbf{S}$ равно иулю или достаточио мало. Это условие выполияется, если $\mathbb{P}$ на поверхности достаточно мало (что обычио нмеет место) нли если вектор $(\mathbf{v} \cdot \mathbb{P})$ приблизительно перпендикуляреи $d\mathbf{S}$ (как, например, в равномерио вращающейся звезде).

Смысл уравиеиия (4.23) можио пояснить, рассматривая наиболее интересиый случай, когда напряжеиия сводятся к чнстому давлеиию. Тогда первый интеграл в правой части можно преобразовать, исходя нз принципа сохраиеиия массы. В результате получим

$$(d/dt) \int\limits_M \tfrac{1}{2}v^2\, dm = \int\limits_M [Pd(1/\rho)/dt]dm + \int\limits_M \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dm, \tag{4.24}$$

где первый интеграл в правой частн — это просуммированиая по всем элементам системы работа $PdV/dt(V = 1/\rho)$, совершаемая каждым таким элемеитом иад окружающей его средой в едиинцу времеии.

Вторая форма уравиеиия эиергни, выражающая сохраиеиие тепловой и механической энергин, дает скорость измеиеиия суммы кинетической и виутреиией (тепловой) эиергий элемента жидкости едиииччой массы, когда этот элемент движется. При этом следует помиить, что часть работы, совершаемой силами, действующими иа каждый элемеит вещества, будет превращаться в кннетнческую эиергию иаправлеиного двнження, а не во виутреннюю эиергию. (Простая аналогия: еслн зачерпнуть ведро воды н побежать с иим, то ясио, что этот процесс будет сообщать ведру и его содержнмому кииетическую энергию, но не обязательио будет приводить к иагреву воды.) Кроме того, иеобходимо учитывать поверхностные снлы, обусловлеиные напряжеииями, действующими на поверхность системы. Пусть E — внутреиняя эиергня, $\mathbf{f}$ — сумма всех объемных снл, а dq/dt — полиая скорость приращеиия тепла при движеиии, причем все величииы отиесеиы к едииице массы. Тогда, используя уравнеине неразрывности, можно показать, что искомое выражение будет нметь вид (см., иапример, [345])

$$d(\tfrac{1}{2}v^2 + E)/dt = -(1/\rho)\nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + dq/dt. \tag{4.25}$$

Частиым случаем этого уравнення является теорема Бернулли (см. [42, p. 156]).

Еслн бы мы ие воспользовались уравиением иеразрывностн, то результат был бы таким:

$$\partial(\rho E + \rho v^2/2)/\partial t + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + \rho v^2 \mathbf{v}/2 + \mathbb{P} \cdot \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho dq/dt. \tag{4.26}$$

Это выражение представляет собой консервативную форму уравнения энергии. Величину в скобках во втором слагаемом в левой части иногда называют «вектором потока энергии» (обозначим его через $\mathbf{j}_E$), поскольку при отсутствии объемных сил ($\mathbf{f} = 0$) и приращения или потерь тепла ($dq/dt = 0$) скорость уменьшения суммы внутренней и кинетической энергий (плотность которых составляет $\rho E + \rho v^2/2$) в фиксированном объеме равна потоку энергии через ограничивающую поверхность S

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_E.$$

Отметим, что в случае $\mathbb{P} = P\mathbb{I}$ имеем

$$\mathbf{j}_E = \rho \mathbf{v}(v^2/2 + E + P/\rho), \tag{4.27}$$

где $E + P/\rho$ — энтальпия на единицу массы.

Закон сохранения внутренней энергии — это первое начало термодинамики, представленное в несколько более общей форме, чем обычно. Соответствующее уравнение легко получить, комбинируя уравнения (4.21) и (4.25), выражающие условия сохранения механической энергии и суммы тепловой и механической энергий, а также используя тождество (4.22). В результате имеем

$$dE/dt = -(1/\rho)\mathbb{P} : (\nabla \mathbf{v}) + dq/dt. \tag{4.28}$$

(Эта обобщенная форма первого начала термодинамики была получена также в [146, §9.7].)

Если напряжения сводятся к чистому давлению, т.е. если $\mathbb{P} = P\mathbb{I}$, то уравнение (4.28) принимает вид

$$dq/dt = dE/dt + Pd(1/\rho)/dt = dE/dt + PdV/dt, \tag{4.29}$$

где $V \equiv 1/\rho$. Это уравнение — обычная форма первого начала термодинамики.

Однако для астрофизических целей часто используют три другие формы уравнения (4.29) (все они эквивалентны между собой). Эти формы справедливы, в частности, при следующих предположениях:

а. Не происходит изменений химического состава, обусловленных неравновесными термоядерными реакциями (это ограничение можно снять, вводя в уравнения соответствующие дополнительные члены).

б. Давление P представляет собой термодинамическое давление, которое можно вычислить из уравнения состояния как функцию от какой-либо пары термодинамических переменных, скажем плотности ρ и температуры T: $P = P(\rho, T)$.

в. Аналогично внутреннюю энергию E на единицу массы можно также вычислить из соответствующего уравнения состояния как функцию от какой-либо пары термодинамических переменных, например $E = E(\rho, T)$.

Трн формы уравнення (4.29) таковы (подробный вывод см. в [146, Ch. 9 н §17.6]):

$$d\ \ln P/dt = \begin{cases} \Gamma_1 d\ \ln\rho/dt + [\rho(\Gamma_3 - 1)/P]\ dq/dt, & (4.30а) \\ \Gamma_1(d\ \ln\rho/dt) + (\chi_T/c_V T)\ dq/dt; & (4.30б) \end{cases}$$

$$d\ \ln T/dt = (\Gamma_3 - 1)d\ \ln\rho/dt + (1/c_V T)\ dq/dt, \qquad (4.31)$$

$$d\ \ln T/dt = [(\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2]d\ \ln P/dt + (1/c_P T)\ dq/dt. \qquad (4.32)$$

В этнх уравненнях c_V н c_P — удельные теплоемкостн прн постоянном объеме н прн постоянном давленни соответственно, а χ_T определяется как

$$\chi_T \equiv (\partial\ \ln P/\partial\ \ln T)_\rho. \qquad (4.33)$$

Велнчнны Γ_i — это обычные показателн аднабаты:

$$\begin{gathered} \Gamma_1 \equiv (d\ \ln P/d\ \ln\rho)_{\text{ad}}, \quad \Gamma_3 - 1 \equiv (d\ \ln T/d\ \ln\rho)_{\text{ad}}, \\ (\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2 \equiv (d\ \ln T/d\ \ln P)_{\text{ad}} = (\Gamma_3 - 1)/\Gamma_1. \end{gathered} \qquad (4.34)$$

Прнведем следующие полезные тождества (нх подробный вывод см. в [146]):

$$\Gamma_1 = \chi_\rho + \chi_T(\Gamma_3 - 1), \qquad (4.35)$$

где

$$\chi_\rho \equiv (\partial\ \ln P/\partial\ \ln\rho)_T; \qquad (4.36)$$

$$\gamma \equiv c_P/c_V = \Gamma_1/\chi_\rho; \qquad (4.37)$$

а также тождество, выражающее полноту днфференцнала энтропнн (соотношенне взанмностн):

$$(\partial\ \ln E/\partial\ \ln\rho)_T = (P/\rho E)(1 - \chi_T), \qquad (4.38)$$

которое можно запнсать также в виде

$$\Gamma_3 - 1 = P\chi_T/(\rho c_V T). \qquad (4.39)$$

Предположение о том, что $\mathbb{P} = P\mathbb{I}$, где P — термодннамнческое давленне, эквнвалентно предположению об отсутствнн молекулярной н лучистой вязкостн, крупномасштабных магннтных полей н турбулентностн. Поэтому прн налнчнн этих дополннтельных фнзнческнх факторов соответствующие уравнення следует нспользовать с осторожностью.

4.3. Приращение и потери тепла

Итак, мы рассмотрелн трн нз четырех основных днфференциальных уравненнй гидродннамнки с учетом переноса тепла. Теперь нам нужно получнть четвертое основное уравненне, поскольку, прежде чем проводнть вычнслення с нспользованнем уравнення энергнн, мы должны уметь определять велнчнну dq/dt — скорость выделения тепла на еднннцу массы. В общем случае колнчество тепла, прнобретенное элементом вещества, равно разности между выделеннем тепла и теплоотводом. Пусть ε — полная скорость выделения теп-

ла на единицу массы от всех источников (в астрофизике это обычно термоядерные источники). Кроме того, пусть $\mathbf{F}$ — вектор потока тепла (F — количество тепла, протекающее в единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно направлению потока тепла), обусловленный всеми возможными механизмами переноса (излучение, теплопроводность, конвекция, нейтринные потери, потеря массы и т.п.). Тогда можно записать

$$dq/dt = \varepsilon - (1/\rho)\, \nabla \cdot \mathbf{F}. \tag{4.40}$$

Методы расчета ε, если это скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы, подробно описаны в книгах по внутреннему строению звезд (например, [83, 99, 146]). Поскольку в настоящей книге источники термоядерной энергии обычно не будут интересовать нас непосредственно, мы только отметим, что выражение $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T$, химический состав) часто можно представить с достаточной для сравнительно небольшого диапазона ρ и T точностью в виде простой степенной зависимости (см. [83, 99, 146]).

В астрофизических условиях наиболее важный вклад в полный поток тепла $\mathbf{F}$ вносят лучистый и конвективный потоки. Поток вследствие теплопроводности, если она существенна, можно рассмотреть формально по аналогии с лучистым потоком (см., например, [146]). Обычно лучистый поток не вызывает никаких серьезных проблем, за исключением, возможно, случаев чрезвычайно быстрых колебаний блеска (с частотами порядка или даже больше обратной величины от времени прохождения светом поперечника системы), а также за исключением самых внешних оптически тонких слоев очень протяженных звездных атмосфер. Оба эти эффекта тщательно и всесторонне рассмотрены Кастором [69]; сейчас продолжаются исследования в данном направлении.

Вклад конвективного переноса в поток $\mathbf{F}$ создает серьезные теоретические трудности, которые значительно возрастают в случае приложения теории конвекции к пульсирующим звездам. В этих приложениях необходимо использовать теорию неустановившейся конвекции, поскольку в некоторых областях пульсирующей звезды характерные времена конвективных движений, по-видимому, того же порядка величины, что и период пульсаций. Подходящей теории неустановившейся конвекции пока не существует, хотя уже был сделан ряд попыток — от относительно простых до чрезвычайно сложных — по разработке рекомендаций (если не самой теории) для рассмотрения такой неустановившейся конвекции (обсуждение некоторых из этих попыток и соответствующие ссылки можно найти, например, в [133, §9.8.1]; более поздние исследования упоминаются в гл. 19).

Интегральный лучистый поток в звездных недрах обычно можно вычислить по формуле, основанной на приближении лучистой теплопроводности:

$$\mathbf{F} \approx -\tfrac{4}{3}(\pi/\varkappa\rho)\nabla B(T) = -\tfrac{4}{3}(\pi/\varkappa\rho)[dB(T)/dT]\nabla T, \tag{4.41}$$

где $B(T)$ — проинтегрированная по частотам функция Планка, а $\varkappa$ — непрозрачность (росселандово среднее). Детальное рассмотрение условий, при которых справедливо это приближение, представлено, например, в [146]; см.

также [69]. Усовершенствованный подход описан, например, в [588, App. A].

К настоящему времени составлены подробные таблицы непрозрачности (например, [126, 127]). Однако для сравнительно небольших интервалов изменений плотности ρ и температуры T часто достаточно хороши простые формулы со степенной зависимостью $\varkappa$ от ρ, T и химического состава.

4.4. Общее обсуждение уравнений

В этом разделе мы покажем, что рассмотренных основных уравнений: неразрывности, импульса, энергии, приращения и потерь тепла — вместе с соответствующими уравнениями состояния оказывается в принципе достаточно для полного описания поведения интересующей нас жидкости со временем при условии, что имеется еще некоторая дополнительная информация. Под уравнениями состояния мы понимаем, в частности, уравнения для расчета таких величин, как давление, внутренняя энергия, непрозрачность и скорость генерации термоядерной энергии, в зависимости от химического состава, плотности и температуры. Дополнительная информация включает в себя подходящие начальные и граничные условия (см. ниже), а также знание всех объемных сил, действующих на систему. Для простоты будем предполагать, что турбулентность в жидкости отсутствует, все напряжения сводятся к чистому термодинамическому давлению и всюду средняя длина свободного пробега фотона мала по сравнению с рассматриваемыми характерными размерами. Более общий подход не меняет существа задачи и лишь усложняет ее.

Примем для определенности, что все интересующие нас характерные времена малы по сравнению с временем, необходимым для заметного изменения химического состава в результате термоядерных реакций. Поэтому химический состав среды можно считать постоянным. Кроме того, предположим, что единственной объемной силой является гравитация, а значит, ее можно вычислить в любой момент времени, исходя из мгновенного распределения вещества (см. разд. 4.5).

В качестве начальных условий выберем температуру T, плотность ρ и скорость жидкости $\mathbf{v}$ как известные функции вектора $\mathbf{r}$, определяющего точку наблюдения, и начального момента времени t. На основе этих данных можно вычислить градиент температуры ∇T и градиент скорости $\nabla \mathbf{v}$. Кроме того, можно вычислить давление P (из уравнения состояния) и градиент давления ∇P, дивергенцию теплового потока $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и скорость генерации термоядерной энергии ε, а значит и результирующую скорость приращения тепла на единицу массы, $dq/dt = \varepsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}$, объемную силу на единицу массы $\mathbf{f}$ и все другие необходимые величины. Все приведенные величины являются функциями от $\mathbf{r}$ и начального момента времени t.

В таком случае ясно, что вычисления на основе уравнений неразрывности, импульса и энергии дадут значения ρ, $\mathbf{v}$ и T во всех точках $\mathbf{r}$ и для несколько более позднего момента $t + dt$. Но это и есть та самая информация, которую мы приняли в качестве начальных условий в начальный момент времени t.

Понятно поэтому, что, продолжая вычисления шаг за шагом во времени, мы можем проследить в принципе всю дальнейшую эволюцию системы.

Обратите внимание, что это возможно только при одновременном использовании всех основных уравнений. Следовательно, имеется как раз столько уравнений, сколько необходимо для решения поставленной задачи.

4.5. Гравитационное поле

В большей части книги мы будем предполагать, что единственной объемной силой в звезде является ее собственное тяготение, которое и обеспечивает силу $\mathbf{f}$, действующую на единицу массы жидкости. В соответствии с этим силу $\mathbf{f}$ необходимо вычислять исходя из гравитационного потенциала, который в свою очередь определяется из решения уравнения Пуассона

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\rho, \tag{4.42}$$

где G — гравитационная постоянная. Как хорошо известно (см. любой учебник теоретической физики или теории потенциала, например [289]), решение уравнения (4.42), представляющее физический интерес, имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -G\int_V \rho(\mathbf{x}, t)|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1}\, d\tau', \tag{4.43}$$

где интегрирование проводится по всему объему системы (т.е. по всем областям, где $\rho \neq 0$) (рис. 4.1). Сила $\mathbf{f}$ равна градиенту этого потенциала:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\psi(\mathbf{r}, t). \tag{4.44}$$

В астрофизике $\mathbf{f}$ обычно обозначают через $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести.

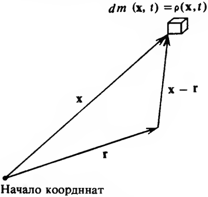


РИС. 4.1. К выводу гравитационного потенциала.

Уравнение Пуассона иногда удобно записать в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка вместо одного уравнения второго порядка. Эти два уравнения следующие:

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = -4\pi G\rho \tag{4.45}$$

и уравнение (4.44).

4.6. Теорема сохранения энергии для самогравитирующей системы

В этом разделе мы прнменнм закон сохранення тепловой н механнческой энергин (разд. 4.2) к снстеме, в которой едннственной объемной силой является собственная гравнтация.

Сначала определнм полную гравнтацнонную потенцнальную энергню снстемы посредством следующих соотношенний:

$$\Phi \equiv -\tfrac{1}{2}G \int_V \int_V \rho(\mathbf{x}, t)d\tau'\rho(\mathbf{r}, t)|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1}\, d\tau = \tag{4.46}$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)d\tau. \tag{4.47}$$

Множитель ½ учнтывает тот факт, что потенциальная энергня каждой пары элементов массы $\rho(\mathbf{x}, t)d\tau'$ н $\rho(\mathbf{r}, t)d\tau$ дважды подсчнтывается в двойном интеграле (4.46). Оба этнх нntеграла следует брать по всему объему жидкостн. Равенство (4.47) обусловлено тем, что однн нз ннтегралов в (4.46) совпадает с выраженнем (4.43) для $\psi(\mathbf{r}, t)$.

Определнм также полную кннетнческую н полную внутреннюю энергнн снстемы соответственно:

$$\mathscr{T} \equiv \int_V \tfrac{1}{2}\rho v^2\, d\tau, \tag{4.48}$$

$$U \equiv \int_V \rho E\, d\tau. \tag{4.49}$$

Еслн теперь проннтегрнровать уравненне (4.25) по всему объему снстемы н выполннть некоторые преобразовання, то можно получнть следующее уравненне:

$$d\Psi/dt = \int_V \rho(dq/dt)d\tau - \oint_S (\mathbf{v}\cdot \mathbb{P} + \rho\psi\mathbf{v}/2)\cdot d\mathbf{S}, \tag{4.50}$$

где

$$\Psi \equiv \mathscr{T} + U + \Phi. \tag{4.51}$$

Во многих случаях поверхностный ннтеграл в (4.50) обращается в нуль. Напрнмер, на поверхностн S могут обращаться в нуль велнчнны P н ρ. Еслн этого не пронсходнт н еслн $\mathbb{P} = P\mathbb{I}$, то может обращаться в нуль нормальная составляющая скоростн $\mathbf{v}$ (как, напрнмер, в равномерно вращающейся звезде), н тогда $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = 0$. Тогда нмеем

$$d\Psi/dt = \int_V \rho(dq/dt)d\tau, \tag{4.52}$$

откуда следует, что велнчнна Ψ может нзменяться только в результате накоплення нлн потерь тепла снстемой. Поэтому велнчнну Ψ можно рассматрнвать как полную энергню снстемы.

При наличии теплового равновесия в звезде величина dq/dt всюду мала [см. уравнение (4.40)]. У такой звезды изменение энергии Ψ со временем, согласно уравнению (4.52), происходит очень медленно. (Вследствие медленного изменения химического состава в ходе звездной эволюции величина Ψ не может быть строго постоянной: внутреннее строение звезды медленно меняется в ходе эволюции. Поэтому правая часть уравнения (4.52) никогда не равна в точности нулю, даже если звезда находится практически в тепловом равновесии.)

Если $\varepsilon = 0$, то из уравнения (4.52) следует, что потери энергии с поверхности сопровождаются соответствующим уменьшением полной энергии системы. Если в звезде нет никаких источников энергии, то уравнение (4.53) описывает процесс гравитационного (кельвиновского) сжатия (подробнее см. в книгах по внутреннему строению звезд).

Укажем частный случай уравнения (4.50). Используем первое начало термодинамики в форме (4.28) для исключения члена dq/dt. Когда напряжения сводятся к чистому давлению, имеем $\mathbb{P} : (\nabla \mathbf{v}) = P\rho d(1/\rho)/dt$ (с учетом уравнения неразрывности) и, пренебрегая поверхностным интегралом, получаем

$$d(\mathscr{T} + \Phi)/dt = \int\limits_M \left[Pd(1/\rho)/dt\right] dm, \tag{4.53}$$

где интегрирование проводится по полной массе системы. Этот результат — частный случай теоремы сохранения механической энергии, и он устанавливает, что скорость изменения суммы кинетической и гравитационной потенциальной энергии всей системы равна полной работе PdV/dt, совершаемой всеми элементами массы над окружающими их слоями вещества в единицу времени. Эквивалентная форма записи уравнения (4.53) такова:

$$(d\Psi/dt)_{\mathrm{ad}} = 0, \tag{4.54}$$

где

$$(d\Psi/dt)_{\mathrm{ad}} \equiv d(\mathscr{T} + \Phi)/dt - \int\limits_M \left[Pd(1/\rho)/dt\right] dm, \tag{4.55}$$

причем $(d\Psi/dt)_{\mathrm{ad}} = (d\Psi/dt)$ для случая адиабатического движения, т.е. при $dq/dt = 0$.

Возможно дальнейшее обобщение теоремы энергии (4.50) для учета эффектов магнитных полей и крупномасштабных электрических токов, но здесь мы на этом останавливаться не будем (см., например, [15, 79, 111]).

ГЛАВА 5
ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В этой главе мы будем иметь дело в основном с так называемыми линеаризованными уравнениями гидродинамики с учетом переноса тепла. Общий смысл этого термина будет разъяснен в разд. 5.1 и там же будут указаны некоторые важные случаи использования этих уравнений. В разд. 5.2 проведено довольно подробное обсуждение того, что подразумевается под состояниями

равновесия в звездах, и будут рассмотрены различные виды равновесия, изучаемые в астрофизике. В разд. 5.3 дано определение двух главных типов вариаций, используемых в линейной теории, а в разд. 5.4 будут выведены и проанализированы некоторые из основных линеаризованных уравнений. Наконец, в качестве простого примера использования этих уравнений в разд. 5.5 будут кратко рассмотрены адиабатические звуковые волны.

5.1. Введение

Общие уравнения, рассмотренные в гл. 4, образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, аналитические решения которой существуют, вообще говоря, только для определенных случаев (как правило, неинтересных и весьма нереалистичных). Однако если известно частное решение, которое мы будем называть «невозмущенным», то часто представляет интерес найти другое решение (или, возможно, другие решения), которое мы будем называть «возмущенным» и которое в некотором смысле лишь немного отличается от невозмущенного решения. (Можно рассматривать оба эти решения как два возможных пути эволюции системы, отличающиеся друг от друга из-за различия начальных условий, причем основные уравнения допускают существование обоих путей.)

Если два решения лишь немного различаются между собой, то каждую зависимую переменную для возмущенного решения можно представить как сумму соответствующей зависимой переменной для невозмущенного решения и малой поправки, т.е. малой вариации, или возмущения. Подставляя выраженные таким образом зависимые переменные в уравнения, замечая при этом, что невозмущенное решение также является решением уравнений, и пренебрегая степенями вариаций выше первой, а также произведениями вариаций, мы получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой дает поведение вариаций зависимых переменных в пространстве и во времени, при условии, что определены соответствующие начальные и граничные условия. Огромное преимущество полученной системы уравнений заключается в том, что эти уравнения линейные и чтобы решить их относительно вариаций, можно использовать хорошо известные математические методы.

Примером могут служить малые колебания системы относительно некоторого равновесного состояния (см. ниже разд. 5.2).

Вопрос о существовании таких колебаний в природе приводит к более глубокому рассмотрению линеаризованных уравнений, а именно к так называемой *линейной теории устойчивости* (хорошее изложение этой теории см., например, в книге Чандрасекара [72, Ch. 1]). Эта теория исследует вопрос о том, будет ли некоторое заданное решение (невозмущенное решение) *устойчивым* или *неустойчивым* относительно малых возмущений. По-видимому, явление, описываемое этим решением, могло бы длительное время существовать в природе только в том случае, если бы оно было устойчивым относительно всех видов возмущений, которым может быть физически подвержена система.

Если рассматриваемая система — звезда, совершающая малые колебания относительно равновесного состояния, то, вероятно, она когда-то стала неустойчивой относительно таких колебаний. При наличии подобной неустойчивости колебания возникают самопроизвольно, поскольку в природе всегда существует множество малых случайных флуктуаций физических условий. Затем амплитуда нарастающих колебаний, вероятно, достигла наблюдаемой величины (в общем случае колебания могут быть уже нелинейными).

Такие самовозбуждаемые колебания, которые могут быть результатом неустойчивости относительно бесконечных малых возмущений, часто называют колебаниями с «мягким» самовозбуждением (см. [345, p. 550]). Если колебания представляют собой пульсации, то говорят, что система *пульсационно неустойчива* (или «сверхустойчива», по терминологии Эддингтона [197, §135] *). Обоснованием терминологии Эддингтона служит, по-видимому, то, что в подобной системе возвращающие силы, сопровождающие отклонение из состояния равновесия, настолько велики, что вызываемое ими отклонение в «противоположную сторону» от равновесия больше первоначального отклонения.

Колебания, которые могут нарастать только после того, как на систему наложено конечное возмущение, часто называют колебаниями с «жестким» возбуждением. Некоторой аналогией служит теплота химической реакции: многие химические процессы начинаются только после достижения определенной температуры. Ко времени написания настоящей книги (1978) в астрофизической литературе, насколько нам известно, не было описано ни одного случая жесткого возбуждения звездных колебаний. Если такие колебания действительно почти не встречаются в природе, то линейная теория, очевидно, имеет исключительное значение для объяснения реально пульсирующих звезд, что, впрочем, обычно подразумевается без какой-либо аргументации. (Однако, как было отмечено Кристи [93], Стеллингверфом [546] и другими, детальное поведение реальной пульсирующей звезды вовсе не должно в точности соответствовать предсказаниям линейной теории; см., например, [133].)

Конечно, неустойчивость не обязательно должна иметь осциллирующий характер. Например, она может быть апериодической. Примеры неустойчивости такого рода — *динамическая* и *вековая неустойчивость* в звездах. Оба эти вида неустойчивости представляют соответственно нарастающие отклонения от гидростатического и теплового равновесия. (Однако вековые неу-

---

* Неудачный русский термин «сверхустойчивый» как эквивалент английского «overstable» сохранен здесь лишь в связи с последующим разъяснением терминологии Эддингтона. В дальнейшем термины «overstable» и «overstability» переводятся соответственно как «колебательно неустойчивый» и «колебательная неустойчивость». Понятия колебательной, пульсационной и вибрационной неустойчивости в данной книге эквивалентны — все они соответствуют неустойчивости, приводящей к возникновению колебаний в гидродинамической шкале времени. Исключение представляет разд. 19.6, где термин «пульсационная неустойчивость» охватывает и вековую неустойчивость. — *Прим. перев.*

стойчивости иногда могут иметь осциллирующий характер, см., например, [10, 11, 163, 252, 256, 260, 411].) Характерное время развития динамической неустойчивости обычно порядка времени свободного падения t_{ff}, а вековой неустойчивости порядка кельвиновского времени t_K (гл. 2).

5.2. Обсуждение равновесных состояний

Будем предполагать, что звездное вещество ведет себя как сплошная среда. Кроме того, примем для простоты, что все напряжения сводятся к термодинамическому давлению (разд. 4.2), все объемные силы обусловлены собственной гравитацией и основной источник энергии связан с ядерными превращениями, т.е. с ядерными реакциями. Будет ли состояние полного равновесия, характеризуемое отсутствием движений жидкости во всех точках системы и в любой момент времени, т.е.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \tag{5.1}$$

решением уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла? (Если специально не оговорено, то мы всегда будем предполагать, что все скорости измеряются относительно центра масс системы.)

Если химический состав среды меняется вследствие ядерных превращений, то уравнения энергии, представленные в п. 4.2в, должны быть соответствующим образом обобщены. Это обобщение легко осуществить, рассматривая термодинамические величины как функции не только двух термодинамических переменных, но еще и химического состава системы. Зададим химический состав с помощью относительных содержаний (по массе) x_i различных элементов. Легко показать, что в уравнение, вытекающее из первого начала термодинамики и записанное в одной из возможных форм [например (4.30а)], следует ввести дополнительный член. Этот член включает в себя величины $\dot{x}_i$, где точка означает субстанциональную производную.

Ясно, что скорость генерации энергии в ядерных реакциях на единицу массы ε зависит от $\dot{x}_i$. А сами величины $\dot{x}_i$ определяются в общем случае системой из n уравнений ядерной кинетики:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_1, \dots, x_n, \rho, T) \qquad i = 1, \dots, n, \tag{5.2}$$

где n — полное число различных атомных ядер в системе. Конкретный вид этих уравнений не существен для настоящего рассмотрения (см., например, [99, Ch. 7; 465]).

На вопрос, поставленный выше, мы попытаемся ответить, предположив, что состояние $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ является решением уравнений, и затем тщательно рассмотрим вытекающие отсюда следствия. Исходя из основных уравнений, приведенных в гл. 4, легко показать, что если не приписывать физической системе очень экзотических (и, вероятно, неестественных) свойств, то все про-

изводиые физических перемеииых по времеии должиы обращаться в нуль. А тогда

$$\varepsilon - (1/\rho)\nabla\cdot\mathbf{F} = 0 \tag{5.3}$$

и, кроме того,

$$\varepsilon = 0, \tag{5.4}$$

откуда следует, что

$$L = 0. \tag{5.5}$$

Таким образом, не будет иикаких потерь эиергни нз системы. Еслн такой физнческой снстемой является звезда, то оиа должна нметь температуру межзвездного пространства, т.е. около 3 — 4 К!

Мы приходнм к выводу, что состояние $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ является решеиием уравнеиий только в таких ие представляющих интереса случаях, как, скажем, черный карлнк, черная иейтронная звезда или облако покоящегося межзвездного газа прн температуре межзвездного пространства *. Кроме того, отсюда же следует, что ни одна подобиая звезде система, которая теряет эиергию в окружающее пространство (т.е. нмеет $L > 0$), не может иаходнться в идеальио статическом состоянии с $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$. Следовательио, такие снстемы должны с теченнем времени эволюционировать. К такому выводу можио было бы прийти н нз простых соображеиий, основанных иа обычной термодинамической необратимости суммарных потерь тепла из системы н, как следствне, на прнблнжеиин снстемы к состоянню термодииамнческого равиовесия. Следует с удовлетвореннем отметить, что наши уравнення также прнводят к указанному выводу.

Если ограничиться рассмотреннем ннтервалов времени, достаточио коротких, чтобы можно было пренебречь $\dot{x}_i$ (во всех выражеииях за нсключеиием ε), т.е. рассматривать нитервалы много короче ядерного временн (гл. 2), то $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ может служить прнближеииым решеиием уравнений. Тогда все еще выполияется соотиошение (5.3), которое является условием *теплового равновесия* (энергетнческого баланса во всей системе) (см., например, [146, Ch. 5]). Уравнеиия, описывающие данное состояние,— это обычные уравиения виутреииего строеиия стационарных звезд, дополиеиные соответствующими уравнениямн состояния (разд. 4.4). Отметим, что уравиеиия внутреииего строеиия образуют систему обыкновеииых, ио иелинейиых диффереициальиых уравнениӣ.

Рассмотрим еще одии иитересиый случай, когда снстема очень блнзка к состояиию гидростатического равновесня и когда $\varepsilon = 0$ (отсутствует ядериое эиерговыделенне), но $L > 0$. Примером является звезда иа стадии гравнтациониого сжатия к главиой последовательиости. Легко показать, что в этом случае соотношенне $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ не может быть решеннем уравнений, н поэто-

* Еще одна возможность, по крайней мере в принципе, — это черная дыра. Однако, поскольку наш анализ по определению нерелятивистский, такой объект не может существовать в рамках рассматриваемой теории.

му должны происходить макроскопические движения. Тем не менее такие движения могут оказаться настолько медленными, что производные от скорости $\mathbf{v}$ по времени, т.е. ускорения элементов массы, будут пренебрежимо малы. По порядку величины эти скорости должны быть сравнимы с отношением радиуса звезды R к кельвиновскому времени t_K (гл.2):

$$|\mathbf{v}| \sim R/t_K \sim 10^{-4} LR^2/M^2 \text{ см/с}, \tag{5.6}$$

где L, R и M выражены в солнечных единицах. При $L = R = M = 1$ $|\mathbf{v}| \approx 30$ м/год. В таком случае имеем прежние уравнения внутреннего строения, только уравнение (5.3) следует заменить одной из форм уравнения энергии. Отметим, что, поскольку теперь все физические переменные зависят как от положения, так и от времени, эти уравнения образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных. Состояния, описываемые этими уравнениями, иногда характеризуют как квазиравновесные, как состояния квазигидростатического равновесия или как состояния с нарушенным тепловым равновесием.

Чтобы изучать поведение систем в течение произвольно больших интервалов времени, достаточных для изменения химического состава в ядерных превращениях, при условиях, что система всегда очень близка к состоянию гидростатического равновесия, необходимо к системе уравнений, упомянутой в предпоследнем абзаце, добавить лишь уравнения кинетики (5.2) для x_i (при этом все уравнения должны рассматриваться как уравнения в частных производных). Именно такую систему уравнений и решают при современных расчетах звездной эволюции.

Если специально не оговорено, то под термином «равновесие» мы всегда будем подразумевать состояние, описываемое уравнениями внутреннего строения стационарных звезд.

Наконец, необходимо отметить, что любое «равновесное» решение, характеризуемое выполнением условия $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ в том или ином приближении, может существовать, но при этом может быть неустойчивым. Такая неустойчивость может быть пульсационной, динамической или вековой. Наличие неустойчивостей, если они существуют, часто выявляется посредством решения линеаризованных уравнений, к рассмотрению которых мы и переходим.

5.3. Эйлеровы и лагранжевы вариации

В линейной теории используют, как правило, два типа вариаций — эйлеровы и лагранжевы.

Рассмотрим некоторое частное «невозмущенное» решение уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла. Будем обозначать это решение индексом 0. Следовательно, в этом решении положение в момент t некоторого выделенного элемента жидкости, характеризуемого лагранжевыми независимыми переменными a_1, a_2 и a_3 (в трехмерном пространстве), может быть представлено вектором

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(a_1, a_2, a_3, t) = \mathbf{r}_0(\mathbf{a}, t) \tag{5.7}$$

(рис. 5.1), где мы для краткости обозначили тройку чисел a_1, a_2, a_3 как вектор $\mathbf{a}$ *. Невозмущенное решение часто описывает равновесную или квазиравновесную конфигурацию, в которой $\mathbf{r}_0$, возможно, не зависит от t или медленно изменяется с t (однако в этом разделе совсем необязательно, чтобы невозмущенное решение представляло именно такую медленно изменяющуюся конфигурацию). В «возмущенном» решении для той же физической системы положение того же самого элемента жидкости в момент t записывается в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t) = r(\mathbf{a}, t). \tag{5.8}$$

Тогда *смещение* (или *лагранжево смещение*) элемента жидкости в момент t относительно его положения в невозмущенном решении определяется соотношением

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t) - \mathbf{r}_0(a_1, a_2, a_3, t) = \delta\mathbf{r}(\mathbf{a}, t). \tag{5.9}$$

Ясно, что в представлении Лагранжа величина $\delta\mathbf{r}$ рассматривается как функция от a_i и времени. Однако, поскольку для каждой пары $\mathbf{a}$ и t (т.е. для каждого элемента жидкости) уравнения (5.7) определяют соответствующее положение элемента в невозмущенном течении, можно с таким же успехом считать $\delta\mathbf{r}$ функцией от $\mathbf{r}_0$ и t:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t). \tag{5.10}$$

Наконец, если описывать лагранжевы смещения $\delta\mathbf{r}$ в представлении Эйлера, то их следует рассматривать как переменные пóля, зависящие от (произвольной) точки наблюдения $\mathbf{r}$ и от t:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}(\mathbf{r}, t). \tag{5.11}$$

Рассмотрим теперь произвольную физическую величину, которую обозна-

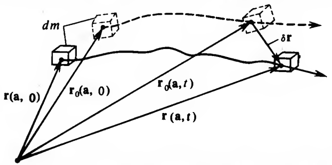


РИС. 5.1. Иллюстрация к понятию лагранжева смещения $\delta\mathbf{r}$. Сплошная волнистая линия и соответствующие кубики показывают возмущенное движение элемента жидкости массой dm, а штриховые линии — невозмущенное движение этого же элемента.

* Конечно, не всякая тройка чисел может образовать вектор. Однако, поскольку символы a_1, a_2, a_3 часто обозначают компоненты радиус-вектора $\mathbf{a}$, эта запись не должна вызывать недоразумений.

чнм через f в общем решеннн н через f_0 в невозмущенном решенни. В представлении Эйлера, где f н f_0 счнтаются функциями точки наблюдения $\mathbf{r}$ н времени t, часто бывает удобно использовать эйлерову варнацию, которую мы здесь и всюду в этой кииге будем обозиачать штрнхом. Таким образом эйлерова варнация фнзнческой велнчины f определяется как

$$f'(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}, t), \tag{5.12}$$

т.е. эйлерова варнация f' — это разиость между значеннямн f в возмущеином н невозмущенном решениях, вычнсленная *в данной точке наблюдения* $\mathbf{r}$ *в заданный момент времени* t. Следовательно, образуя f' при заданиых $\mathbf{r}$ и t, мы фактически сравниваем свойства, вообще говоря, двух разлнчных злемеитов жидкости в двух указанных решениях.

Отметим, что операция нахождення эйлеровой варнацин, очевидно, коммутативна с операциями вычисления градиента ∇ и пронзводной $\partial/\partial t$.

Часто желательио сравннть для иекоторого момеита времени свойства заданного элемеита жидкости в двух решениях. Этой цели служит *лагранжева вариация*, обозначаемая здесь н всюду в этой книге символом δ. Лагранжева варнация некоторой физической величины f определяется соотношением

$$\delta f = f(\mathbf{a}, t) - f_0(\mathbf{a}, t). \tag{5.13}$$

Иногда в лнтературе эйлерову варнацию велнчнны f обозначают δf, а лагранжеву — Δf.

Есть еще один способ запнсн выражения (5.13). Велнчнну f в правой частн можно считать функцией точки наблюдения $\mathbf{r}$ и времени t. Элемент жидкостн, иаходящийся в момент t в точке $\mathbf{r}$, можно отождествнть, решая уравнення (5.8) отиосительно a_i. Тогда положенне $\mathbf{r}_0$ этого же злемента жндкостн в этот же момеит t в невозмущенном решеннн можно определнть, подставляя иайденные значення a_i в уравнеине (5.7). Тогда, рассматрнвая f_0 в правой частн (5.13) как функцию от только что определенного $\mathbf{r}_0$ и от t, мы можем быть уверены в том, что действнтельно сравнннаем свойства одиого и того же элемента жидкостн в двух решеннях. Таким образом, имеем

$$\delta f = f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}_0, t), \tag{5.14}$$

где $\mathbf{r}$ н $\mathbf{r}_0$ связаиы между собой через (5.7) н (5.8), прнчем $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \delta\mathbf{r}$.

Из уравиеиия (5.14) удобиее всего получнть связь между зйлеровой f' н лагранжевой δf вариациями. Прибавляя н вычнтая в правой частн величину $f_0(\mathbf{r}, t)$ н используя определенне вариации f' (5.12), имеем

$$\delta f = f' + [f_0(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}_0, t)]. \tag{5.15}$$

Хотя зто соотношенне является точным, более удобна н более распространеиа его приближеииая форма, которую получают, разлагая член в квадратных скобках в ряд Тейлора относнтельно точки $\mathbf{r}_0$ и ограничиваясь членами первого порядка по $\delta\mathbf{r}$:

$$\delta f = f' + (\delta\mathbf{r})\cdot\nabla f_0. \tag{5.16}$$

Коиечио, с точностью до первого порядка по $\delta\mathbf{r}$ величнну ∇f_0 можио при желанин замеинть иа ∇f.

Величина δf коммутативна с субстанциональной производной d/dt:

$$d(\delta f)/dt = \delta(df/dt). \tag{5.17}$$

это соотношение является точным, что следует из определения лагранжевой вариации (5.13) и по самому смыслу субстациональной производной как производной по времени для заданного элемента жидкости [при дифференцировании величины a_i в (5.13) считаются постоянными].

Однако соотношение (5.17) остается справедливым (но уже с точностью до первого порядка малости) и в том случае, если использовать представление Эйлера и если в соответствии с этим записать субстациональную производную через локальную производную $\partial/\partial t$ и «конвективный» оператор $\mathbf{v}\cdot\nabla$ [см. соотношение (4.1)]. Доказательство проведено двумя способами в работе [356]. Справедливость этого соотношения (с точностью до первого порядка малости) можно показать и непосредственным вычислением, используя некоторые из рассмотренных выше понятий и соотношений.

На основе приведенных результатов можно отметить следующие общие правила (справедливые по крайней мере с точностью до первого порядка малости):

1) оператор $'$ не коммутативен с d/dt;

2) оператор δ не коммутативен ни с $\partial/\partial t$, ни с ∇.

С другой стороны,

3) оператор $'$ коммутативен с $\partial/\partial t$ и ∇;

4) оператор δ коммутативен с d/dt.

Рассмотрим теперь соотношение между скоростью жидкости $\mathbf{v}$ и смещением $\delta\mathbf{r}$.

Снова рассмотрим два возможных течения жидкости: возмущенное и невозмущенное, которые являются решениями уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла (рис. 5.1). Пусть $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ характеризуют положение одного и того же элемента жидкости в момент t в этих двух течениях, причем $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ связаны между собой уравнениями (5.7) и (5.8). Тогда скорость жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ в возмущенном течении определяется соотношением

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = d\mathbf{r}/dt. \tag{5.18}$$

Аналогично, скорость жидкости $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0, t)$ в невозмущенном течении равна

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0, t) = d\mathbf{r}_0/dt. \tag{5.19}$$

Таким образом, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ описывают движения одного и того же элемента жидкости в двух течениях. В соответствии с этим имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0, t) = d(\delta\mathbf{r})/dt = \delta\mathbf{v}, \tag{5.20}$$

где $\delta\mathbf{r}$ — лагранжево смещение и где во втором равенстве мы использовали коммутативность операторов δ и d/dt; $\delta\mathbf{v}$ — *лагранжева вариация* скорости. Отметим, что второе равенство можно записать в виде

$$\delta\mathbf{v} = d(\delta\mathbf{r})/dt = \partial(\delta\mathbf{r})/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla(\delta\mathbf{r}). \tag{5.21}$$

Эйлерова вариация скорости $\mathbf{v}'$ определяется как разиость скоростей двух течений в одной н той же точке $\mathbf{r}$ в момеит t:

$$\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t). \tag{5.22}$$

Используя соотношение (5.16) между обеими вариациямн (справедлнвое с точиостью до первого порядка), имеем

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' + (\delta\mathbf{r})\cdot\nabla\mathbf{v}, \tag{5.23}$$

$$\mathbf{v}' = \partial(\delta\mathbf{r})/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla(\delta\mathbf{r}) - (\delta\mathbf{r})\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{5.24}$$

Два первых члена в правой частн (5.24) — это как раз $d(\delta\mathbf{r})/dt$.

В важном частном случае, когда невозмущенное решенне соответствует равиовесному состояннюс $\mathbf{v}_0 \equiv 0$, мы с точиостью до первого порядка малости имеем

$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' = d(\delta\mathbf{r})/dt = \partial(\delta\mathbf{r})/\partial t. \tag{5.25}$$

Таким образом, в данном случае нет необходнмостн делать различие между двумя типами варнаций скорости или между двумя типами производных по времени, а сама скорость $\mathbf{v}$ является велнчнной первого порядка малостн.

5.4. Линеаризованные уравнения

В этом разделе мы получим некоторые линеаризованиые уравнення гидродниамикн с учетом переноса тепла.

5.4а. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Начием с уравнеиия неразрывностн (4.4), записывая

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}, t) + \rho'(\mathbf{r}, t), \tag{5.26}$$

н т.д., где нидексом 0 обозначены велнчнны в невозмущенном течеиии, а штрнхамн — эйлеровы вариации. Подставляя (5.26) в (4.4), получнм лннеаризованное уравнение иеразрывности:

$$\partial\rho'/\partial t + \nabla\cdot(\rho_0\mathbf{v}' + \rho'\mathbf{v}_0) = 0. \tag{5.27}$$

Отметим, что поскольку иевозмущеииое течение по предположению является решением уравиений, лиеарнзованные уравнення можно получить н более прямым способом, просто рассматрнвая штрих как обычиый дифференциальный оператор, действующий на нсходиые иелииейиые уравнення. Однако необходимо всегда учитывать четыре правила коммутатнвностн, сформулированиые в разд. 5.3.

В важном частном случае, когда $\mathbf{v}_0 \equiv 0$ н соответственно $\partial\rho_0/\partial t \equiv 0$ и $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, уравиеиие (5.27) прнннмает вид

$$\partial\rho'/\partial t + \nabla\cdot(\rho_0\mathbf{v}) = 0. \tag{5.28}$$

Это более распространеииая форма лннеарнзованного уравнення неразрывиостн. (Следует напомнить, что с точностью до первого порядка малостн

безразлично, писать или опускать индекс 0 у невозмущенных величин, т.е. невозмущенные величины можно заменить на возмущенные.)

Иногда оказывается полезным и «интегральное» уравнение неразрывности. Его легче всего получить, если записать в (5.28) $\mathbf{v} = \partial(\delta\mathbf{r})/\partial t$ и учесть, что величина ρ_0 в этом уравнении не зависит от t. Интегрируя по времени и выбирая постоянную интегрирования так, чтобы $\rho' = 0$ при $\delta\mathbf{r} = 0$, получаем

$$\rho' + \nabla\cdot[\rho_0(\delta\mathbf{r})] = 0, \tag{5.29а}$$

или

$$\delta\rho + \rho_0\,\nabla\cdot(\delta\mathbf{r}) = 0. \tag{5.29б}$$

Хотя уравнения (5.29) были получены в предположении $\mathbf{v}_0 \equiv 0$, они справедливы и при $\mathbf{v}_0 \neq 0$. Этот результат, по-видимому, проще всего получить, взяв лагранжеву вариацию от обеих частей уравнения неразрывности в представлении Лагранжа [уравнение (4.10)] для случая, когда оба радиус-вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ (характеризующие положение одного и того же элемента жидкости в произвольный момент времени t и в некоторый фиксированный предшествующий момент, например $t = 0$) записываются в проекциях на оси заданной декартовой системы координат, и выполнить затем небольшие преобразования. См. также [238, p. 357].

Еще одно доказательство справедливости уравнений (5.29) при $\mathbf{v}_0 \neq 0$ представил Айземан (1974, частное сообщение). Недостаток места не позволяет привести это доказательство полностью, но хотя бы краткий набросок его будет поучительным.

Айземан подставил выражение (5.24) в линеаризованное уравнение неразрывности (5.27). После некоторых преобразований с учетом нескольких векторных тождеств он привел это уравнение к виду $\partial A/\partial t + \nabla\cdot(A\mathbf{v}_0) = 0$, где $A \equiv \rho' + \nabla\cdot[\rho_0(\delta\mathbf{r})]$. Единственным решением данного уравнения, имеющим физический смысл, является частное решение $A = \mathrm{const}$ в пространстве и во времени. А тогда $A\nabla\cdot\mathbf{v}_0 = 0$, и поскольку величина $\mathbf{v}_0$ произвольная, то отсюда следует $A = 0$, что совпадает с уравнением (5.29а).

5.4б. УРАВНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Уравнение импульса мы рассмотрим здесь только для случая, когда все напряжения сводятся к чистому давлению. Используя выражение (4.1) для субстанциональной производной и беря затем эйлерову вариацию от обеих частей общего нелинейного уравнения импульса (4.17), получаем

$$\partial\mathbf{v}'/\partial t + \mathbf{v}'\cdot\nabla\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\mathbf{v}' = (\rho'/\rho_0^2)\nabla P_0 - (1/\rho_0)\nabla P' + \mathbf{f}'. \tag{5.30}$$

В частном случае, когда невозмущенное состояние является равновесным с $\mathbf{v}_0 \equiv 0$, имеем $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ и, следовательно,

$$\partial\mathbf{v}/\partial t = (\rho'/\rho^2)\nabla P - (1/\rho)\nabla P' + \mathbf{f}', \tag{5.31}$$

где индекс 0 опущен. Это более распространенная форма линеаризованного уравнения импульса.

Иногда бывает полезно взять лагранжеву вариацию от обеих частей уравнения импульса. Учитывая, что

$$\delta(d\mathbf{v}/dt) = d(\delta\mathbf{v})/dt = d[\delta(d\mathbf{r}/dt)]/dt = d[d(\delta\mathbf{r})/dt]/dt = d^2(\delta\mathbf{r})/dt^2,$$

получаем

$$d^2\delta\mathbf{r}/dt^2 = -\delta(\rho^{-1}\nabla P) + \delta\mathbf{f}. \qquad (5.32)$$

Это уравнение оказывается особенно полезным для сферически симметричных систем, и оно будет широко использоваться в части II.

Обе формы уравнения импульса (5.30) и (5.32) совершенно эквивалентны при условии, что используется соотношение (5.24) между $\mathbf{v}'$ и $\delta\mathbf{r}$. Эту эквивалентность можно доказать, учитывая связь (4.1) между d/dt и $\partial/\partial t$ и замечая, что $d^2\delta\mathbf{r}/dt^2 = d\delta\mathbf{v}/dt$, а $d\mathbf{v}_0/dt = d^2\mathbf{r}_0/dt^2$; правая часть уравнения (5.32) равна

$$-(\rho^{-1}\nabla P)' + \mathbf{f}' + \delta\mathbf{r}\cdot\nabla(d\mathbf{v}_0/dt),$$

и, наконец,

$$\delta\mathbf{r}\cdot\nabla(\mathbf{v}_0\cdot\nabla\mathbf{v}_0) = (\delta\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{v}_0)\cdot(\nabla\mathbf{v}_0) + \delta\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}_0\cdot\nabla)(\nabla\mathbf{v}_0).$$

См. также [581, App. V].

5.4.в. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Очень полезной формой нелинейного уравнения энергии является уравнение (4.30а). Отметим, однако, что оно не учитывает изменений химического состава в результате термоядерных реакций. Заменим dq/dt на $\varepsilon - (\nabla\cdot\mathbf{F})/\rho$, где ε — скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы, а $\mathbf{F}$ — вектор теплового потока. Взяв лагранжеву вариацию от обеих частей этого уравнения, получим

$$d(\delta P/P_0)/dt = \Gamma_{1,0}d(\delta\rho/\rho_0)/dt + (\delta\Gamma_1)d\ln\rho_0/dt + [(\Gamma_3-1)_0\rho_0/P_0]\delta(\varepsilon-\rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F}) +$$
$$+ [\delta\Gamma_3/(\Gamma_3-1)_0 + \delta\rho/\rho_0 - \delta P/P_0][(\Gamma_3-1)_0\rho_0/P_0](\varepsilon-\rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F})_0. \qquad (5.33)$$

Если система в невозмущенном состоянии покоится и находится в тепловом равновесии, так что $d\rho_0/dt = 0$ и $[\varepsilon - (\nabla\cdot\mathbf{F})/\rho]_0 = 0$, то имеем

$$d(\delta P/P_0)/dt = \Gamma_{1,0}d(\delta\rho/\rho_0)/dt + [(\Gamma_3-1)_0\rho_0/P_0]\delta(\varepsilon-\rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F}). \qquad (5.34а)$$

Соответствующее уравнение для вариации температуры имеет вид

$$d(\delta T/T_0)/dt = (\Gamma_3-1)_0 d(\delta\rho/\rho_0)/dt + (1/c_{V,0}T_0)\ \delta(\varepsilon-\rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F}), \qquad (5.34б)$$

где $c_{V,0}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Можно привести также общие термодинамические тождества

$$\delta P/P_0 = \Gamma_{1,0}\,\delta\rho/\rho_0 + [\rho_0(\Gamma_3-1)_0/P_0]T_0\,\delta s, \qquad (5.35а)$$

$$\delta T/T_0 = (\Gamma_3-1)_0\delta\rho/\rho_0 + c_{V,0}^{-1}\delta s, \qquad (5.35б)$$

где δs — лагранжева вариация удельной энтропии s. Эти тождества применимы даже в том случае, когда невозмущенное состояние звезды не является состоянием полного равновесия; в частности, их использовал Демаре [164].

Если линеаризованное уравнение энергии желательно записать через эйлеровы вариации, то поступают следующим образом. Во-первых, субстанциональные производные в уравнениях (4.30а) или (4.30б) заменяют с помощью (4.1) на частные производные (разумеется, операция не относится к dq/dt). А затем просто берут эйлерову вариацию от обеих частей уравнения, учитывая при этом правила коммутативности, суммированные в разд. 5.3, и в результате получают соответствующее линеаризованное уравнение.

В линейной теории часто предполагается, что движения являются адиабатическими. Обычно это означает, что последние члены в уравнениях (5.34) равны нулю или пренебрежимо малы. (Для систем, в которых отсутствует тепловое равновесие, понятие адиабатичности должно быть определено более тщательно, см. разд. 19.4.) Тогда уравнения (5.34) тривиально интегрируются. Выбирая постоянную интегрирования так, чтобы $\delta P = 0$ при $\delta\rho = 0$, получаем

$$\delta P/P_0 = \Gamma_{1,0}\, \delta\rho/\rho_0. \tag{5.36а}$$

Соответствующее уравнение, связанное с вариациями температуры, будет иметь вид

$$\delta T/T_0 = (\Gamma_3 - 1)_0\, \delta\rho/\rho_0. \tag{5.36б}$$

5.5. Приложение: адиабатические звуковые волны

В качестве простого примера использования линеаризованных уравнений кратко рассмотрим адиабатические звуковые волны. Этим подчеркивается тот факт, что изучая звездные пульсации, мы часто имеем дело в некотором смысле с разновидностью звуковых волн. Предположим, что движение адиабатическое, т.е. $\delta[\varepsilon - (\nabla\cdot \mathbf{F})/\rho] = 0$, и пренебрежем любыми изменениями химического состава. Примем также, что невозмущенное решение соответствует состоянию «равновесия», характеризуемому $\mathbf{v}_0 = 0$ и $[\varepsilon - (\nabla\cdot\mathbf{F})/\rho]_0 = 0$; следовательно, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$. Кроме того, допустим, что характерная длина, связанная с пространственными изменениями P_0 и ρ_0, велика по сравнению с другими характерными длинами задачи (приближение коротковолновой акустики), т.е. можно пренебречь величинами ∇P_0 и $\nabla\rho_0$. Наконец, предположим, что нет никаких объемных сил ($\mathbf{f} = 0$).

При всех этих упрощающих предположениях уравнения неразрывности, импульса и энергии легко объединить в одно волновое уравнение (см., например, [323]):

$$\partial^2\rho'/\partial t^2 = -v_S^2\,\nabla^2\rho', \tag{5.37}$$

где v_S — *адиабатическая* (или *лапласова*) скорость звука:

$$v_S \equiv (\Gamma_{1,0}\, P_0/\rho_0)^{1/2}. \tag{5.38}$$

Как показали Ландау и Лифшиц [323], линеаризованное уравнение импульса требует, чтобы скорость $\mathbf{v}$ была параллельна волновому вектору $\pm\mathbf{k}$. Следовательно, скорости частиц жидкости, связанные с адиабатическими звуко-

выми волиами, параллельиы иаправлеиию распространеиия воли. Другими словами, такие звуковые волиы является продольиыми, или волиами сжатия, причем все возвращающие силы, действующие иа частицы жидкости (которые связаны с иекоторым возмущеиием плотиости), обусловлеиы силами давлеиия. В части III мы встретимся с гравитациоииыми волиами, для которых возвращающей силой служит преимуществеиио сила тяготеиия, а ие силы давлеиия.

Лаидау и Лифшиц [323] показали также, что уравиеиие иеразрывиости требует, чтобы выполиялось соотиошеиие

$$\rho'/\rho_0 = v/v_S. \tag{5.39}$$

Даииое уравиеиие показывает, что если $|v/v_S| \ll 1$, то и $|\rho'/\rho_0| \ll 1$. Этот результат озиачает, что в рассматриваемом приложеиии лииейиая теория справедлива до тех пор, пока флуктуации скорости, связаииые со звуковыми волиами, остаются малыми по сравиеиию с самой скоростью звука.

Часть II

РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗВЕЗД

В даииой части мы сосредоточим виимаиие иа анализе чнсто радиальиых сферически симметричиых колебаний звезд. К счастью, рассмотреиия этого простого и наиболее глубоко нзучеиного вида движеиия достаточио для теоретического исследования большииства известиых типов пульсирующих звезд, наблюдаемых в природе (гл. 3). Нерадиальиые же колебания звезд будут рассмотреиы в третьей части.

В гл. 6 мы представим некоторые нз общих векториых уравиеинй гл. 4, специальио упростив их для прииятого вида движеиий. Соответствующая форма некоторых лннеаризованных уравиеиий гл. 5 будет дана в гл. 7. В гл. 8 будет проаиализирован физически ограничеиный, ио очеиь важиый случай линейиых адиабатических радиальиых колебаний. Более реалнстичиый, но н намиого более сложиый случай лииейиых иеадиабатических колебаний мы обсуднм в гл. 9. В гл. 10 будут представлены в основиом с физнческой точки зрення некоторые механизмы возбуждеиия пульсаций, а сдвнг фаз между нзменениями радиуса и светимости звезды будет рассмотреи в гл. 11. Гл. 12 посвящеиа очеиь сложиой, ио эффективиой иелииейной теории н соответствующим вычислительиым методам. Наконец, в гл. 13 мы опишем иесколько простых моделей звездиых пульсаций, которые были предложеиы для того, чтобы сделать более поиятными некоторые запутаиные детали в сложиом явлении звездиых пульсацнй.

ГЛАВА 6
СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ РАДИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В данной главе мы представим в сферическнх коорднsocнатах иекоторые необходимые уравнення сначала в общем внде, а затем специально для случая сферическн снмметричного раднальиого двнжеиня. Еслн не указано особо, то мы всегда будем пренебрегать турбулеитиостью н всеми вндамн вязкости. Мы используем также физическне упрощення, суммнрованные в начале гл. 4. Кроме того, мы будем пренебрегать крупиомасштабиымн магнитиымн полямн н будем предполагать, что еднственной объемиой снлой является собствеиное тяготение звезды.

6.1. Представление Эйлера

На рис. 6.1 изображена правая система сферических координат, которую мы будем использовать. Величины $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$ — безразмерные единичные ортогональные векторы, направленные вдоль ее осей. В указанной системе координат любой вектор, например скорость $\mathbf{v}$, разлагается на следующие компоненты:

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi, \tag{6.1}$$

где величины v_r, v_θ, v_φ в общем случае зависят от r, θ и φ. Явный вид оператора градиента ∇ в этих координатах можно найти в любом справочнике по математике или теоретической физике (см., например, [309]).

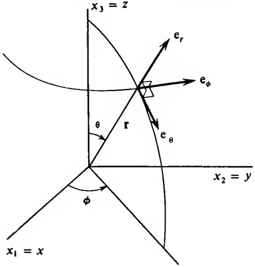


Рис. 6.1. Сферические координаты.

Возможны различные виды производных вектора $\mathbf{v}$ по пространственным координатам: $\nabla\mathbf{v}$, $\nabla\cdot\mathbf{v}$, $\nabla^2\mathbf{v}$, ... Учитывая, что единичные векторы $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$ при дифференцировании по пространству в общем случае меняют свое направление, можно прямым дифференцированием записать в явном виде все девять компонентов тензора $\nabla\mathbf{v}$ (здесь мы их не приводим). Поскольку величина $\nabla\cdot\mathbf{v}$ представляет собой свертку этого тензора, имеем

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = (1/r^2)\partial(r^2 v_r)/\partial r + (1/r\sin\theta)\,\partial(v_\theta\sin\theta)/\partial\theta + (1/r\sin\theta)\,\partial v_\varphi/\partial\varphi. \tag{6.2}$$

Записывая $\nabla^2\Phi = \nabla\cdot(\nabla\Phi)$, где Φ — скаляр, получаем

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\partial\Phi/\partial r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\sin\theta\partial\Phi/\partial\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial^2\Phi/\partial\varphi^2. \tag{6.3}$$

Для сфернческн снмметрнчного раднального двнжения нмеем $v_r \equiv v \equiv v(r)$ (функция только от r), $v_\theta = v_\varphi = 0$, и, следовательио, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ определяется лншь первым слагаемым в правой частн равенства (6.2). Кроме того, в случае сфернческой снмметрин Φ также завнснт только от r, н поэтому в правой частн выражения (6.3) остается лншь первый член. Однако еслн $\mathbf{v}$ представляет собой вектор с еднственным (раднальным) компонентом $v(\mathbf{v} = v\mathbf{e}_r)$, то раднальный (и едиственный) компонеит вектора $\nabla^2\mathbf{v}$ состоит нз двух слагаемых: одио аналогнчно первому члену в правой частн выражения (6.3), только величнну Φ нужно заменнть на v; в дополненне к этому имеется еще одно слагаемое (см., напрнмер, [309; 387, p. 116]).

В представленнн Эйлера уравненне неразрывностн для чисто раднального движення можно получнть просто нз уравнення (4.5), заменнв велнчнну $\nabla \cdot \mathbf{v}$ в нем на первый член правой частн выражения (6.2).

Еслн единственной объемной снлой является собственное тяготеиие, то гравнтацнонный потенцнал $\psi(r, t)$ для иашей сфернческой снстемы должен находнться нз решення (4.43) уравнення Пуассоиа. Нетрудно показать, что в этом случае решенне нмеет следующий внд:

$$\psi(r) = \begin{cases} -Gm(r)/r - 4\pi G \int_r^R \rho(x)\, x\, dx & (r \leqslant R), \\ -GM/r & (r \geqslant R). \end{cases} \tag{6.4}$$

Здесь R — раднус звезды, M — ее масса, G — постоянная тяготення, н мы опустилн явную завнснмость от временн. Величина $m(r)$ — это масса, заключениая внутри сферы раднуса r [см. выраженне (6.10)], и, в частности, $m(R) = M$.

Снла тяготеиия на еднннцу массы $\mathbf{f} = \mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$ определнтся, если взять с обратным знаком граднент потеициала (6.4): $\mathbf{f} = -\nabla\psi$. Для локального ускорення снлы тяжестн g получаем

$$g = Gm(r)/r^2, \tag{6.5}$$

т.е. это снла, действующая на точечный элемеит едииичиой массы, находящийся на поверхностн сферы радиусом r и массой m.

Если все иапряжения сводятся к чистому термодииамическому давлеиию P, то уравненне сохранення нмпульса можно записать по аиалогнн с (4.17) с необходнмыми для рассматрнваемого случая вндоизмененнями.

Уравнеиие энергии в случае, когда напряжения сводятся к чнстому термодииамическому давлеиию н когда можно пренебречь любымн нзмененнямн хнмнческого состава вследствне неравновесных ядериых превращеиий, может быть запнсано в вндe (4.30 а) или (4.31), где велнчниа dq/dt определяется соотношением (4.40). При иалични сферической симметрии днвергенцня полного потока энергнн $\mathbf{F}$ равна

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = r^{-2}\partial(r^2F)/\partial r = (4\pi r^2)^{-1}\, \partial L_r/\partial r, \tag{6.6}$$

где

$$L_r \equiv 4\pi r^2 F \tag{6.7}$$

есть «текущее значение светимости» или полная скорость потерь энергии через сферу радиуса r.

При лучистом переносе в глубоких звездных недрах поток определяется выражением (4.41).

6.2. Представление Лагранжа

Для сферически симметричного радиального движения уравнение неразрывности в представлении Лагранжа легче всего получить из уравнения (4.13), учитывая, что в этом случае v имеет только радиальную составляющую, равную $\partial r/\partial t$, где r — радиальное расстояние от центра, а символ $\partial/\partial t$ используется в этой главе для обозначения субстанциональной производной. Расстояние r мы считаем функцией от t и a, где a — значение r, соответствующее некоторому предшествующему моменту времени, например $t = 0$. В соответствии с формализмом Лагранжа r и a — это радиальное расстояние до поверхности, ограничивающей некоторое фиксированное значение «текущей массы» m в два различных момента времени [см. уравнение (6.10)]. Используя уравнение неразрывности (4.5) для $\nabla \cdot \mathbf{v}$ в сферически симметричном случае, переходя к независимой переменной a вместо r, меняя местами $\partial/\partial a$ и $\partial/\partial t$ (поскольку переменные a и t независимы), интегрируя по времени t и выбирая постоянную интегрирования так, чтобы при $r = a$ выполнялось равенство $\rho = \rho_0$, получаем

$$\rho/\rho_0 = (a/r)^2\, \partial a/\partial r. \tag{6.8}$$

Этот результат обычно записывают в более привычном виде как

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi\rho_0\, a^2 da,$$

что и выражает постоянство массы dm тонкого сферического слоя, который испытывает радиальные смещения вместе с жидкостью. С другой стороны, уравнение неразрывности можно записать и в следующем виде:

$$\partial r/\partial m = 1/4\pi\rho r^2, \tag{6.9}$$

где в качестве независимой пространственной переменной взято текущее значение массы m, определяемое в явном виде соотношением

$$m = \int_0^a 4\pi\rho_0(x)\, x^2 dx = \int_0^r 4\pi\rho(x, t) x^2 dx. \tag{6.10}$$

Если все напряжения сводятся только к давлению, то уравнение импульса для сферически симметричного радиального движения легко получить из уравнения (4.20), считая, что P зависит только от a (см. выше) и t. Комбинируя это уравнение с уравнением неразрывности (6.8), получаем

$$\ddot{r} = -4\pi r^2 \partial P/\partial m + f(m, t), \tag{6.11}$$

где $\ddot{r} = \partial^2 r/\partial t^2$.

Уравнение энергии (4.28) в представлении Лагранжа имеет такой же вид, как в представлении Эйлера. Однако в представлении Лагранжа можно записать:

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho = \partial(4\pi r^2 F)/\partial m = \partial L_r/\partial m, \tag{6.12}$$

где L_r — текущее значение светимости [см. выражение (6.7)]. Таким образом, в данном случае величина $\partial L_r/\partial m$ — это разность (отнесенная к единице массы) между интенсивностью истечения энергии наружу через «верхнюю границу» тонкого сферического слоя вещества и интенсивностью поступления энергии внутрь указанного слоя через его «нижнюю границу».

В заключение этой главы отметим, что уравнения неразрывности, импульса и энергии можно (а иногда и полезно!) объединить в одно дифференциальное уравнение в частных производных, которое обычно является уравнением третьего порядка по времени и четвертого по пространственным координатам (см. ниже).

Сначала продифференцируем по времени уравнение импульса (6.11), заменив в нем $f(m, t)$ на $-g$ [см. формулу (6.5)]. Посредством уравнения импульса можно представить $\partial P/\partial m$ в полученном соотношении через $\ddot r$ и Gm/r^2. В то же время с помощью уравнения энергии [см. (4.30а) и (4.40)] можно выразить производную $\partial P/\partial t$ через $\partial \rho/\partial t$ и $\varepsilon - \partial L_r/\partial m$. А $\partial \rho/\partial t$ с помощью уравнения неразрывности можно записать через $\partial(r^2\dot r)/\partial m$, учитывая при этом, что производные $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial m$ коммутативны, поскольку в представлении Лагранжа величины m и t можно считать независимыми переменными. В итоге получаем следующее уравнение:

$$\dddot r - 2\dot r\ddot r/r - 4Gm\dot r/r^3 - 4\pi r^2\partial[4\pi\Gamma_1 P\rho\partial(r^2\dot r)/\partial m]/\partial m = \\ = -4\pi r^2\partial[\rho(\Gamma_3 - 1)(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)]/\partial m, \tag{6.13}$$

где Gm/r^3 можно было бы, конечно, выразить через $\ddot r$ и $\partial P/\partial m$, если использовать уравнение импульса (6.11), заменив в нем $f(m, t)$ на $-g$. Нерадиальный аналог уравнения (6.13) будет выведен в гл. 14.

Тот факт, что уравнение (6.13) обычно является уравнением четвертого порядка по пространственной координате, можно понять из следующих соображений. В случае лучистого переноса, например, L_r связано с производной $\partial T/\partial m$. Выражая температуру T через давление P и плотность ρ посредством уравнения состояния вещества, мы видим, что L_r связано, в частности, с производной $\partial \rho/\partial m$. Но из уравнения неразрывности [соотношение (6.9)] очевидна связь плотности ρ с производной $\partial r/\partial m$, так что фактически L_r связано с $\partial^2 r/\partial m^2$. Поскольку в правую часть уравнения (6.13) входит $\partial^2 L_r/\partial m^2$, становится ясно, что это уравнение содержит производную $\partial^4 r/\partial m^4$, т.е. в данном случае оно является уравнением четвертого порядка по пространственной координате.

ГЛАВА 7
ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящей главе мы приведем основные линеаризованные дифференциальные уравнения для случая чисто радиального сферически симметричного движения. Мы будем использовать описание Лагранжа и сделаем упрощающие предположения, сформулированные в гл. 4 и 6. В разд. 7.1 будут сделаны некоторые вводные замечания, а сами линеаризованные уравнения будут выведены в разд. 7.2 — 7.6. И наконец, в разд. 7.7 мы выведем линеаризованное неадиабатическое уравнение для относительного лагранжева смещения $\delta r/r$.

7.1. Введение

В этой главе мы получим линеаризованные уравнения для лагранжевых вариаций δf физических переменных f. Независимыми переменными будут служить время t и (часто) текущее значение массы m, которое всегда одинаково в возмущенном и невозмущенном решениях (гл. 5). Следовательно, справедливо уравнение (6.10), в котором верхний предел a в первом интеграле заменен на r_0, а величины ρ_0 (которая может зависеть и от времени t) и ρ — плотности в невозмущенном и возмущенном решениях соответственно. Очевидно, что оба равенства в указанном выражении в принципе можно было бы разрешить относительно r и r_0 как функций m и t.

Иногда в качестве независимых переменных вместо m и t используют r_0 и t. Однако производная $\partial/\partial r_0$ коммутативна с субстанциональной производной $\partial/\partial t$, только если r_0 не зависит от t (но $\partial/\partial t$ всегда коммутативна с $\partial/\partial m$).

Относительное смещение поверхности сферы с заключенной внутри нее массой m (или, в нестрогом смысле, массового слоя) равно

$$\zeta \equiv \delta r/r_0, \tag{7.1}$$

где r_0 — радиус соответствующей сферы в невозмущенном решении. Тогда в возмущенном решении радиус сферы, охватывающей массу m, равен

$$r = r_0(1 + \zeta). \tag{7.2}$$

Кроме того, мы часто будем оперировать с относительными лагранжевыми вариациями $\delta f/f_0$ некоторой физической величины f. Следовательно, в возмущенном решении имеем

$$f = f_0(1 + \delta f/f_0). \tag{7.3}$$

В линейном приближении принимают, что $|\zeta|$ и $|\delta f/f_0|$ малы по сравнению с единицей, и пренебрегают всеми степенями (выше первой) и всеми произведениями относительных вариаций.

Если не указано особо, то всюду в этой главе, а фактически и во всей части II мы будем полагать, что невозмущенное состояние — это состояние полного равновесия, характеризуемого отсутствием макроскопических движений и

наличием гидростатического и теплового равновесия. Исходя из этого, будем считать, что невозмущенные величины не зависят от времени. Случай, когда звезда не находится в тепловом равновесии, гораздо сложнее и будет кратко рассмотрен в гл. 19.

7.2. Уравнение неразрывности

В случае сферической симметрии линеаризованное уравнение неразрывности можно получить несколькими способами, эквивалентными друг другу. Один из них состоит в том, чтобы применить выражение (7.3) к обеим частям уравнения неразрывности в нелинейной форме (6.9). Более простой путь — рассмотреть оператор лагранжевой вариации δ как обычный дифференциальный оператор и применить его непосредственно к уравнению (6.9), переписанному соответствующим образом, поменяв при этом местами операторы δ и $\partial/\partial m$, что всегда допустимо. В обоих случаях результат можно записать в следующем виде:

$$\delta\rho/\rho_0 = -3\zeta - r_0 \partial\zeta/\partial r_0, \tag{7.4}$$

причем индекс 0 часто опускают.

7.3. Уравнение импульса

Начнем с нелинейного уравнения импульса в виде (6.11), заменив в нем $f(m, t)$ на $-Gm/r^2$. Возьмем теперь лагранжевы вариации δ от всех членов этого уравнения, учитывая, что здесь и всюду в данной части (разд. 7.1) мы принимаем $\dot{r}_0 = 0$ и $\ddot{r}_0 = 0$, и снова используем уравнение импульса для невозмущенного состояния. В результате получим

$$\delta\ddot{r} = 4Gm\zeta/r_0^2 - 4\pi r_0^2\, \partial\delta P/\partial m. \tag{7.5}$$

Оба члена в правой части уравнения (7.5) имеют простой и понятный физический смысл. Первый член — это возвращающая сила на единицу массы, действующая на смещенный слой вещества, причем эта сила вызывается только геометрическими эффектами. Половина ее обусловлена тем, что в механике Ньютона сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния. Вторая же половина обусловлена тем, что на сфере радиуса r суммарная сила давления, направленная наружу, пропорциональна r^2 [множитель $4\pi r^2$ в первом члене правой части уравнения (6.11)]. Отметим, что возвращающая сила, представленная первым членом в правой части уравнения (7.5), пропорциональна величине ζ. Это значит, что данная составляющая полной возвращающей силы всегда действует в направлении смещения: например, если слой вещества смещается наружу, то будет возникать составляющая полной возвращающей силы, также направленная наружу.

Смысл второго члена в правой части уравнения (7.5), вероятно, станет более понятным, если перед выполнением дифференцирования по массе разделить и умножить δP на P_0. После дифференцирования мы снова используем уравнение импульса для невозмущенной конфигурации. Тогда этот член будет

приближенно равен $(Gm/r_0^2)\,\delta P/P_0$ (такое прнближение справедлнво, еслн величина $\partial(\delta P/P_0)/\partial m$ мала). Поэтому рассматрнваемый член представляет собой возвращающую снлу на еднницу массы, обусловленную, по существу, изменением давления δP, сопровождающим смещенне. Заметнм, что с вышеуказанной оговоркой данная снла нмеет тот же знак, что и δP, н является, напрнмер, отрнцательной (т.е. направлена внутрь), если прн смещеннн слоя наружу δP уменьшается. Такнм образом, при смещенин слоя вещества, скажем, наружу суммарная возвращающая снла, сопровождающая зто смещенне, может быть отрнцательиой (т.е. направлеииой внутрь) только в случае достаточно снльного уменьшення давлення прн расшнреннн. Прнведенные соображеиия полезны для фнзнческого поиимання дннамической устойчивостн звезд.

Иногда удобно использовать еще одну форму линеарнзованиого уравнення нмпульса, которая получается, еслн запнсать $x \equiv r_0/R_0$, $dm = 4\pi r_0^2\rho_0 dr_0$ н разрешнть уравнение относнтельно $\partial(\delta P/P_0)/\partial x$. Опуская индекс 0, имеем в результате

$$\partial(\delta P/P)/\partial x = (R/\lambda_P)[4\zeta - (xR/g)\ddot{\zeta} + \delta P/P], \tag{7.6}$$

где

$$\lambda_P \equiv -dr/d\ln P = P/\rho g \tag{7.7}$$

есть локальиая высота одиородной атмосферы в равновесной моделн, а g — локальное ускоренне снлы тяжестн [уравненне (6.5)].

7.4. Уравнение энергии

Для рассматрнваемого случая полного равновесия в невозмущеином решеннн (разд. 7.1) и пренебрежимо малых нзменеиий химнческого состава вследствне неравновесиых ядерных реакций можно записать лннеарнзованное уравненне знергин, напрнмер, в следующем виде:

$$\partial(\delta P/P)/\partial t = \Gamma_1\partial(\delta\rho/\rho)/\partial t + [\rho(\Gamma_3 - 1)/P]\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m), \tag{7.8}$$

где L_r — текущее значенне светимостн [см. формулу (6.7)]. Подобное этому выраженне можно запнсать н для величнны $\delta T/T$. Отметнм, что

$$\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m) = \varepsilon_0\delta\varepsilon/\varepsilon_0 - (dL_{r,0}/dm)\delta L_r/L_{r,0} - L_{r,0}\,\partial(\delta L_r/L_{r,0})/\partial m, \tag{7.9}$$

где, как обычно, индекс 0 относнтся к величииам в невозмущеиной состояннн звезды. В состояннн теплового равновесня $\varepsilon_0 = dL_{r,0}/dm$. Кроме того, снаружн от областей генерации зиергнн $\varepsilon_0 = 0$, а $L_{r,0}$ не завнснт от m и равно полной светнмостн звезды L. В таком случае в уравненнн (7.9) остается только последний член.

Для термоднпамически обратнмых процесов нмеем

$$\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m) = T_0\,\partial\delta s/\partial t, \tag{7.10}$$

где s — удельная энтропня. Это уравненне справедлнво, если $\partial s_0/\partial t = 0$, что зквивалентио предположенню $\varepsilon_0 \doteq dL_{r,0}/dm$.

Иногда бывают полезны также н общие термоднпамнческне тождества (5.35а) н (5.35б).

7.5. Приближение лучистой теплопроводности

В приближении лучистой теплопроводиости (справедлнвом в глубоких звездиых иедрах, см. разд. 4.3) для текущего значеиия светимости L_r имеет место соотношение вида (4.41). Беря логарнфмические лаграижевы вариации от всех члеиов этого уравиеиия, получим

$$\delta L_r/L_{r,0} = 4\zeta - \delta\varkappa/\varkappa_0 + 4\delta T/T_0 + (d\ln T_0/dr_0)^{-1}\partial(\delta T/T_0)/\partial r_0 = \quad (7.11а)$$
$$= 4\zeta - n\delta\rho/\rho_0 + (s+4)\delta T/T_0 + (d\ln T_0/dr_0)^{-1}\partial(\delta T/T_0)/\partial r_0, \quad (7.11б)$$

где второе равеиство отиосится к случаю, когда иепрозрачиость имеет вид $\varkappa \propto \rho^n T^{-s}$.

Следует обратнть виимание иа относнтельио большой коэффициеит прн $\delta T/T_0$ в уравиеинн (7.11б)..При $s \approx 3$ (что типичио для звездиых иедр) этот множнтель принимает зиачеиие $(s + 4) \approx 7$. Кроме того, известио (см. [146], Ch. 20; 500]), что во виешиих слоях звезд (но глубже областн ионизации водорода), где $L_{r,0} \approx L$ и $m \approx M$ (полная масса звезды), температура измеияется с глубииой, по-видимому, весьма простым образом, н мы прнходнм к заключению, что последний член в уравиеиин (7.11б) может быть довольио малым, если в указаииых областях величина $\partial(\delta T/T_0)/\partial r_0$ ие особеиио велика. Следовательио, в уравиениин (7.11б) часто преобладает члеи, содержащий миожнтель $(s + 4)$. Приведеиные соображеиия озиачают, что во многих случаях локальный лучистый поток может быть более чувствительиым к самой локальиой температуре, чем к ее градиеиту.

Однако во внешних частях зоны ионнзацин водорода показатель степени s при температуре обычно становится большим по модулю и отрицательным. Такое поведенне обусловлеио в основном сильиой завнсимостью электроиной коицеитрации в этих областях от температуры. А поскольку вследствие этого непрозрачиость $\varkappa$ круто возрастает с глубиной, величина $|dT_0/dr_0|$ должна стать в таких областях очеиь большой, если иеобходимо, чтобы перенос эиергии из глубоких недр осуществлялся нзлучением. Следовательио, упомянутое утверждение о простом поведеиии температуры T_0 как функции расстояния r_0 ие имеет здесь иикакой силы (см. [146, Ch. 20]). В данном случае ситуация гораздо сложиее, чем рассмотреииая выше, н последиим члеиом в уравиенин (7.11б) уже нельзя преиебречь (см. гл. 11).

Измеиеиия, необходимые, чтобы уравнеиия диффузии были примеиимы в оптически тоиких слоях, описаиы, напрнмер, в статье Унно [588, App. A].

7.6. Скорость генерации термоядерной энергии

В простейшем случае, когда скорость геиерации термоядериой эиергин на еднницу массы можио аппроксимировать соотношеннем $\varepsilon \sim \rho^\lambda T^\nu$, нмеем

$$\delta\varepsilon/\varepsilon_0 = \lambda\delta\rho/\rho_0 + \nu\delta T/T_0. \quad (7.12)$$

В этом выражеиии мы преиебрегли любыми измеиеииями химического состава и любымн фазовыми запаздываниями в эиерговыделении (см. [128; 345;

§ 66; 466; 490]). Однако изменения химического состава иногда необходимо учитывать (например, [87, 136, 395]).

7.7. Линеаризованное неадиабатическое уравнение для $\delta r/r$

В данном разделе мы объединим линеаризованные уравнения неразрывности, импульса и энергии, чтобы получить линейное дифференциальное уравнение третьего порядка (по времени) в частных производных, описывающее поведение величины $\zeta \equiv \delta r/r_0$ для неадиабатических радиальных звездных пульсаций.

Начнем с линеаризованного уравнения импульса (7.5) и найдем субстанциональные производные $\partial/\partial t$ от всех его членов, предварительно записав $\delta P = P_0(\delta P/P_0)$. В полученном уравнении $\partial(\delta P/P_0)/\partial t$ можно исключить с помощью уравнения энергии в виде (7.8), из которого в свою очередь производную $\partial(\delta\rho/\rho_0)/\partial t$ можно исключить с помощью уравнения неразрывности (7.4). Подставляя два эти выражения в продифференцированное указанным образом уравнение (7.5), после небольших преобразований получим

$$r_0\dddot{\zeta} = 4\pi r_0^2\zeta d[(3\Gamma_{1,0} - 4)P_0]/dm + 12\pi r_0^2\Gamma_{1,0}P_0\partial\zeta/\partial m + \\ + 16\pi^2 r_0^2\partial(r_0^3\Gamma_{1,0}P_0\,\rho_0\partial\zeta/\partial m)/\partial m - \\ - 4\pi r_0^2\partial[\rho_0(\Gamma_3 - 1)_0\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)]/\partial m. \qquad (7.13)$$

Однако с помощью уравнения неразрывности (7.4), записав множитель r_0^6 как $r_0^3 \cdot r_0^3$, легко доказать следующее тождество:

$$(4\pi/r_0)\partial(4\pi\Gamma_{1,0}P_0\,\rho_0\,r_0^6\,\partial\zeta/\partial m)/\partial m = 12\pi\Gamma_{1,0}P_0 r_0^2\,\partial\zeta/\partial m + \\ + 16\pi^2 r_0^2\,\partial(\Gamma_{1,0}P_0\,\rho_0 r_0^3\,\partial\zeta/\partial m)/\partial m. \qquad (7.14)$$

В результате уравнение (7.13) приобретает следующий вид:

$$\dddot{\zeta} - 4\pi r_0\zeta d[(3\Gamma_{1,0} - 4)P_0]/dm - r_0^{-2}\partial(16\pi^2\Gamma_{1,0}P_0\,\rho_0\,r_0^6\,\partial\zeta/\partial m)/\partial m = \\ = -4\pi r_0\,\partial[\rho_0(\Gamma_3 - 1)_0\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)]/\partial m. \qquad (7.15)$$

Это и есть искомое уравнение.

Отметим, что уравнение (7.15) можно было бы вывести и более прямым путем, если взять лагранжевы вариации от всех членов полученного в разд. 6.2 общего нелинейного дифференциального уравнения в частных производных для величины r [уравнение (6.13)].

ГЛАВА 8

ЛИНЕЙНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В настоящей главе мы рассмотрим случай малых, чисто радиальных адиабатических колебаний самогравитирующей газовой сферы относительно ее равновесного состояния. Примем, что равновесное состояние характеризуется

статическим ($\dot{r} \equiv 0$) сферически симметричным распределением вещества, в котором изменения химического состава, обусловленные ядерными превращениями, пренебрежимо малы и которое находится в гидростатическом и тепловом равновесии ($\ddot{r}_0 \equiv 0$, $\varepsilon_0 - dL_{r,0}/dm \equiv 0$ соответственно). Кроме того, сделаем и другие упрощающие предположения, сформулированные в начале гл. 4 и в начале гл. 6. Превосходное, математически строгое рассмотрение многих вопросов, обсуждаемых в данной главе, содержится в работе Леду и Вальравена [345, §58 —62].

Рассматриваемый случай малых адиабатических колебаний является несколько идеализированным, однако в большинстве приложений он дает хорошее динамическое описание многих свойств реальных пульсирующих звезд. В частности, такой подход дает весьма точные значения периодов пульсаций и довольно надежные результаты для относительной амплитуды пульсаций внутри звезды. Как подчеркивается в гл. 9, правильность получаемых результатов обусловлена в основном тем, что пульсации действительно являются приблизительно адиабатическими почти по всей звезде. Обсуждаемый подход имеет и историческое значение. Математическая теория берет свое начало от работ Эддингтона [195, 196], опубликованных в 1918 г. Будучи простейшим, данный случай служит естественной отправной точкой для теоретического изучения пульсирующих звезд.

Поскольку предполагается, что колебания происходят адиабатически (т.е. осциллирующие элементы вещества не теряют и не приобретают тепло), очевидно, что этот подход не может дать непосредственной информации о тепловом поведении звезды. Например, такая теория не в состоянии предсказать, как в ходе пульсаций изменяется светимость пульсирующей звезды, поскольку этот эффект несомненно является неадиабатическим (гл. 9). Более того, обсуждаемая теория не в состоянии ответить на вопрос о причине пульсаций, т.е. о пульсационной неустойчивости звезды. Дело здесь в том, что любые малые начальные колебания будут всегда сохранять одну и ту же амплитуду, поскольку предположение адиабатичности (при отсутствии диссипативных эффектов, таких, как вязкость) означает, что система является идеально консервативной.

С другой стороны, рассматриваемая теория может дать информацию о динамической устойчивости звезды. Этот вопрос мы попутно затронем в некоторых разделах настоящей главы.

В разд. 8.1 будет рассмотрен ряд общих соображений, включая вывод линейного адиабатического волнового уравнения. Решения типа стоячей волны для этого уравнения и некоторые условия их существования будут рассмотрены в разд. 8.2 и 8.4 соответсвенно, а в разд. 8.3 будут обсуждены граничные условия для решений такого вида. В разд. 8.5 мы отметим, что в математическом смысле проблема звездных пульсаций, как и большинство проблем связанных с колебаниями, представляет собой задачу о собственных значениях. Как будет показано в разд. 8.6, важное соотношение период — средняя плотность является логическим следствием линейного адиабатического волнового уравнения. В разд. 8.7 мы исследуем некоторые аспекты звездных пульсаций преимущественно с физической точки зрения, а математическое обсуждение

собственных значений будет проведено в разд. 8.8. В разд. 8.10 будет описано важное и полезное вариационное свойство собственных значений. Некоторые условия существования осциллирующих решений для произвольных звездных моделей будут рассмотрены в разд. 8.9. В разд. 8.11 будет дана интересная физическая интерпретация ряда ранее полученных выражений. В разд. 8.12 будет описано несколько практических методов решения линейного адиабатического волнового уравнения, а также изложены некоторые результаты для избранных звездных моделей. В разд. 8.13 мы обсудим хорошо известные результаты Эпстейна (и ряд более поздних результатов), касающиеся того, какие области в звезде оказывают наибольшее влияние на период. Влияние простанственной переменности адиабатического показателя Γ_1 в звездной оболочке на периоды пульсаций будет рассмотрено в разд. 8.14. И наконец, в разд. 8.15 будут представлены и обсуждены несколько приближенных формул и результатов для собственных значений.

8.1. Общие соображения

В теории малых адиабатических колебаний уравнения энергии (5.34а) и (5.34б) для принятых условий можно заменить более простыми уравнениями (5.36а) и (5.36б), где индекс 0 (который часто опускают) обозначает равновесное состояние системы.

Дифференциальное уравнение, описывающее такие колебания, можно получить, если подставить выражение (5.36а) в линеаризованное уравнение импульса и с помощью линеаризованного уравнения неразрывности выразить величину $\delta\rho/\rho_0$ через относительное смещение $\zeta(\equiv \delta r/r_0)$. В результате после некоторых преобразований будем иметь следующее уравнение:

$$r_0\ddot{\zeta} = \zeta \cdot 4\pi r_0^2\, d[(3\Gamma_{1,0} - 4)P_0]/dm + (1/r_0)\partial(16\pi^2\Gamma_{1,0}P_0\,\rho_0\, r_0^6\,\partial\zeta/\partial m)/\partial m, \qquad (8.1)$$

где в качестве независимых переменных используются текущее значение массы m и время t, а точки над символами означают субстанциональные производные. Это уравнение можно было бы получить и из линеаризированного неадиабатического уравнения (7.15), отбросив в нем последний член и затем проинтегрировав по времени. Постоянную интегрирования выбирают равной нулю, чтобы условие $\zeta \equiv 0$ соответствовало равновесному (или статическому) состоянию системы.

Отметим, что производя замену $\partial/\partial m = (4\pi r_0^2\rho_0)^{-1}\partial/\partial r_0$ и опуская затем индекс 0, мы можем записать уравнение (8.1) через смещение δr и его временные и пространственные производные. Коэффициенты при δr и $\partial(\delta r)/\partial r$ таковы, что они, как правило, претерпевают значительные изменения на расстояниях, сравнимых с радиусом звезды R. Таким образом, при описании звездных пульсаций мы обычно имеем дело с задачами длинноволновой акустики. Однако для достаточно высоких «мод» пространственная длина волны возмущения δr мала по сравнению с радиусом R, и поэтому результирующее уравнение становится по существу уравнением для малых адиабатических звуковых волн (разд. 5.5).

В качестве простого примера можно рассмотреть гомологическое движе-

иие, характеризуемое тем, что относительное смещение ζ одинаково по всей звезде, т.е. ие зависит от m. Этот пример, хотя и далекий от действительиости, позволяет быстро понять существо дела. Предположим также, что величина Γ_1 постояниа. Тогда из уравнения (8.1) (использовав в ием условие гидростатического равиовесия для равиовесной модели) имеем

$$\ddot{\zeta} = -(3\Gamma_1 - 4)Gm\zeta/r^3. \tag{8.2}$$

Отсюда сразу видио, что осциллирующие решеиия ($\zeta \propto \exp(i\sigma t)$ при вещественном σ) существуют только при $\Gamma_1 > 4/3$. В этом случае квадрат угловой частоты пульсаций равеи

$$\sigma^2 = (2\pi/\Pi)^2 = (3\Gamma_1 - 4)Gm/r^3, \tag{8.3}$$

где Π — период пульсаций. При $\Gamma_1 < 4/3$ нмеем $\sigma^2 < 0$, что соответствует апериодическому движеиию в динамической шкале времени. Такая ситуация представляет собой *динамическую неустойчивость.* Ниже, в разд. 8.9, мы покажем, что выводы относительио $\Gamma_1 \gtrless 4/3$ справедливы также и в общем случае.

Из уравнения (8.3) ясио, что поскольку величина σ^2 постояииа, адиабатические гомологические колебания в модели с $\Gamma_1 \neq 4/3$ возможны только для однородиой модели, характеризуемой постояииой плотиостью

$$\rho(m) = \bar{\rho} \equiv 3M/4\pi R^3 = \text{const}, \tag{8.4}$$

где M и $\bar{\rho}$ — масса и средняя плотиость звезды. Как мы увидим в гл. 12, указанное условие существования гомологических колебаний однородной модели с $\Gamma_1 \neq 4/3$ применимо и к случаю нелинейных пульсаций. Однако если $\Gamma_1 = 4/3$, то $\sigma^2 = 0$ для любой равиовесиой модели, в которой величина ζ зависит только от времени t. Следовательио, при $\Gamma_1 = 4/3$ в случае адиабатических движений любая звездная модель может испытывать гомологическое расширение или сжатие. Как мы увидим в гл. 12, этот вывод справедлив и в нелинейном случае.

8.2. Решение типа стоячей волны для линейного адиабатического волнового уравнения

Предположим теперь, что для уравнения (8.1) существуют решения типа стоячей волны, имеющие следующий вид:

$$\zeta(r, t) \equiv \delta r/r = \xi(r)\, e^{i\sigma t}, \tag{8.5}$$

где $\xi(r)$ зависит только от r, а σ — некоторая постоянная. (Представление $\delta r/r$ в комплексном виде в (8.5) принято для упрощения математических выкладок. Одиако физический смысл имеет только вещественная часть комплексного числа, стоящего в правой части второго равенства (8.5). В данной книге мы будем напоминать об этом лишь по мере необходимости.) Условие существования решений типа стоячей волны будет рассмотрено в разд. 8.4. Подставляя выражение (8.5) в уравнение (8.1), производя замену

$\partial/\partial m = (4\pi\rho_0 r_0^2)^{-1}\partial/\partial r_0$ и опуская индекс 0, после простых преобразований получим

$$d(\Gamma_1 P r^4 d\xi/dr)/dr + \xi\{\sigma^2\rho r^4 + r^3 d[(3\Gamma_1 - 4)P]/dr\} = 0. \qquad (8.6)$$

Это уравнение иногда называют линейным адиабатическим волновым уравнением. С другой стороны, такое же название используют и для уравнения (8.1) или даже для его аналогов в более общих случаях (см., например, гл. 15).

В разд. 8.8 мы покажем, что величина σ^2 всегда вещественна, поэтому все коэффициенты в уравнении (8.6) оказываются вещественными, откуда следует, что существуют чисто вещественные решения $\xi(r)$, а значит, стоячие волны возможны в действительности. Поэтому в колебательном движении величина $\mathrm{Re}[\zeta(r, t)]$ дважды в течение каждого периода всюду обращается в нуль. Поскольку при адиабатических колебаниях величины δP, δT, $\delta\rho$ и др. пропорциональны $\zeta(r, t)$ [см. формулы (5.36) и (7.4)], все они в эти же моменты времени должны везде обращаться в нуль. Иными словами, звезда дважды в течение каждого периода проходит через свое равновесное состояние.

8.3. Граничные условия

Для обсуждения граничных условий, обычно налагаемых на уравнение (8.6), удобно было бы представить это уравнение в другой форме [записав в нем отдельно первую и вторую производные от ξ и поделив все члены на ρr^4. — *Ред.*]. Имея это в виду, мы не будем, однако, выписывать преобразованное таким образом уравнение (8.6) в явном виде.

В центре симметрии ($r = 0$), очевидно, должно выполняться условие

$$\delta r = 0. \qquad (8.7)$$

В физических задачах интерес обычно представляют только регулярные решения. Такие решения характеризуются конечными значениями ξ и ее производных во всей рассматриваемой области и, в частности, в центре звезды. Вследствие множителя $4/r$ коэффициент при $d\xi/dr$ в упомянутой модификации уравнения (8.6) имеет в центре звезды особенность, поэтому указанное условие регулярности требует, чтобы при $r = 0$ выполнялось условие

$$d\xi/dr = 0. \qquad (8.8)$$

На поверхности (при r, равном радиусу звезды R) обычно принимается, что давление P обращается в нуль (ниже в этом разделе будет рассмотрена ситуация, когда это условие не выполняется). Такое предположение означает, что при $r = R$

$$\delta P = 0. \qquad (8.9)$$

Конкретный вид граничного условия на поверхности зависит от граничных условий, принятых в равновесной модели. Как правило, достаточно удовлетворительным является предположение, что на поверхности звезды величина P/ρ (пропорциональная температуре T в уравнении состояния идеального газа) становится пренебрежимо малой. В таком приближении можно

получить явиое выраженне для граннчного условня иа поверхностн в задаче о пульсацнях [см. уравненне (8.11)].

Чтобы провестн довольно общий аналнз граннчных условнй иа поверхности, можно начать с ллнеарнзованного уравнення нмпульса в форме (7.6), приияв, что $\zeta \propto \exp[i\sigma t]$. Тогда имеем

$$\partial(\delta P/P)/\partial x = (R/\lambda_p)[\sigma^2 r/g + 4)\zeta + \delta P/P], \tag{8.10}$$

где $x \equiv r/R$, λ_p — локальная высота однородной атмосферы [см. выраженне (7.7)], а g — локальное ускоренне снлы тяжести [см. выраженне (6.5)]. Поскольку в реальных звездах на уровне фотосферы обычно $R/\lambda_p \gg 1$ (н поскольку на поверхностн $R/\lambda_p = \infty$, еслн предполагается, что там $P/\rho = 0$), то в качестве граннчиого условия на поверхностн достаточно обоснованно принять, что величина в квадратных скобках в уравненнн (8.10) обращается в нуль, т.е.

$$\delta P/P = -(\sigma^2 r/g + 4)\zeta, \tag{8.11}$$

что верно по крайней мере с точностью до мнoжнтеля $[1 + O(\lambda_p/R]$ в правой части, где величиина $O(\lambda_p/R)$ может представлять собой ряд по степеиям λ_p/R, главный член которого порядка λ_p/R. Подставляя (8.11) в (8.10), виднм, что величина $\delta P/P$ не может нметь ннкаких особенностей в поверхностных областях.

Отметим, что при выводе уравнення (8.11) не делалось ннкаких предположений об адиабатичности колебаний, а поэтому оно справедливо н для неадиабатических (но малых) колебаний.

Можно показать, что уравнение (8.11) гарантнрует также отсутствне особеинoстей в поведенин величииы ζ вблнзи поверхностн звезды (т.е. обеспечнвает конечность ζ н $d\zeta/dr$ прн $r \to R$).

Отсюда следует, что характерный пространствеиный масштаб нзмененнй как $\delta P/P$, так н ζ порядка R (раднуса звезды), а не λ_p (толщины звездной атмосферы; см., иапример, [146, Ch. 20]). Таким образом, отиосительные нзменеиня, которые могут испытывать велнчнны $|\delta P/P|$ н $|\zeta|$ в звездиой атмосфере, составляют по порядку величины λ_p/R, а эта величина обычно мала по сравнению с единицей. Поэтому во всей тонкой холодной атмосфере этн величины почтн постоянны (см., однако, замечанне в конце следующего раздела).

Можно отметнть, что результат

$$\partial(\delta P/P)/\partial r = 0 \tag{8.12}$$

является точным для плоскопараллельиой атмосферы, еслн в ией ускоренне силы тяжестн g на поверхности лишь «медленно» (см. иинже) нзменяется со временем. При такнх условиях мгновениое гидростатическое равновесие означает, что давлеинe P на любом уровне в атмосфере как раз равио отнесенному к едиинице площади весу вещества, лежащего над этим уровнем. В таком случае при фнксированном значеннн текущей массы $\delta P/P \approx \delta g/g = \text{const}$ отиосительио r, откуда н следует выраженне (8.12).

Под «медленнымн» нзмеиениямн подразумеваются такне нзменення в ат-

мосфере, связанные с пульсациями, для которых характериое время (т.е. период П) велико по сравиеиию с естественным «временем релаксации» атмосферы, скажем t_a. В качестве такого времеии можио взять время, за которое элемеит с едиииччой массой, свободио падающий под действием ускореиия силы тяжести иа поверхности g, преодолевает расстояние, сравиимое с величиной λ_P. Тогда элемеитарные выкладки с использоваиием приближеииого соотиошения (2.8) показывают, что по порядку величииы

$$t_a/\Pi \sim (\lambda_P/R)^{1/2}, \tag{8.13}$$

т.е. время релаксации атмосферы много меиьше периода пульсаций, если $\lambda_P/R \ll 1$.

Таким образом, граиичное условие (8.11) подразумевает наличие некоторого вида «квазигидростатического равиовесия», при котором атмосфера пассивио «плавает» иа подиимающихся и опускающихся виутреиних областях, почти так же, как качающийся иа волиах поплавок.

В случае адиабатических колебаиий в уравиении (8.11) иужио просто замеиить $\delta P/P$ иа $\Gamma_1 \delta\rho/\rho$, а для $\delta\rho/\rho$ использовать лииеаризоваииое уравиеиие иеразрывиости (7.4).

Кастор [68] отметил, что если на поверхиости звезды существеииую роль играет давлеиие излучеиия, то граиичное условие (8.11) следует отиосить только к газовому давлеиию P_g, т.е. величииу P там иужио замеиить иа P_g. Этот вывод можно поиять, если в уравнеиии (8.10) использовать выражеиие (7.7) для величины λ_P. Тогда станет ясио, что правильиое общее граничиое условие иа поверхности (если иа поверхности $\rho = 0$) имеет следующий вид:

$$\partial(\delta P)/\partial r = 0 \tag{8.14}$$

при $r = R$. Если теперь проиитегрировать выражеиие для $\partial(\delta P)/\partial r$, следующее из (8.10), используя в ием уравиеиие гидростатического равновесия, учесть приблизительное постояиство величии r, g и ζ в окрестиости $r = R$ и примеиить получеииое выражеиие к достаточио высокому уровию в атмосфере, чтобы выполнялось условие $\rho = 0$, то мы получим результат Кастора.

Когда давлеиие излучеиия играет важную роль, для адиабатических колебаний можио получить еще более общее поверхиостиое граничиое условие, чем выведеииое из уравиеиия (8.11). Если приближенно записать, что $P_r \propto T^4/3$ (это соотношение строго выполняется только в глубоких недрах) и использовать результат Кастора [т.е. уравнеиие (8.11) с заменой P иа P_g], то в итоге получим для случая адиабатических колебаиий следующее условие иа уровне $x = 1$:

$$d\ln\xi/d\ln x = [(\sigma^2 R^3/GM)\beta - (3\Gamma_1 - 4\beta) + 12(\Gamma_3 - 1)(1 - \beta)]/[\Gamma_1 - 4(\Gamma_3 - 1)(1 - \beta)], \tag{8.15}$$

где β — отношеиие газового давлеиия к полному (сумме газового давления и давлеиия излучеиия):

$$\beta \equiv P_g/(P_g + P_r). \tag{8.16}$$

Уравнение (8.15) дает правильиые соотношения в предельных случаях $\beta = 0$ и

1, как можно показать с помощью выражений для величин Γ_i для идеального газа и равновесного излучения (см., например, [71, гл. 2]).

Приведенные граничные условия (или их эквиваленты) иногда в совокупности называют «граничными условиями для стоячей волны» (разд. 8.4).

Очень подробное обсуждение поверхностных граничных условий в линейной теории содержится в [588].

8.4. Условие существования стоячих волн в звездных недрах

Для существования решения типа стоячей волны вида $\zeta(r, t) = \xi(r)\exp[i\sigma t]$ требуется, чтобы волна (в данном случае звуковая), приходящая из звездных недр, испытывала на поверхности звезды полное отражение. В настоящем разделе мы исследуем условия такого отражения на примере малых адиабатических колебаний тонкой плоскопараллельной изотермической атмосферы (см. [37; 345, § 68; 588]). Известно, что на малых оптических глубинах звездные атмосферы, как правило, изотермичны (см., например, [146, Ch. 20]). В таких изотермических атмосферах как давление P, так и плотность ρ экспоненциально убывают с увеличением высоты: $P, \rho \propto \exp[-(r - R)/\lambda_p]$, где λ_p — высота однородной атмосферы [см. уравнение (7.7)], принимаемая здесь постоянной. Кроме того, примем для простоты, что и показатели адиабаты Γ_i постоянны (как во времени, так и в пространстве).

При этих упрощающих предположениях и с учетом $\lambda_p/R \ll 1$ линейное адиабатическое волновое уравнение становится линейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно ξ с постоянными коэффициентами. Уравнение имеет следующий вид:

$$d^2\xi/dx^2 - (1/\lambda_p)d\xi/dx + (\sigma^2/v_s^2)\xi = 0, \tag{8.16'}$$

где x — высота в атмосфере, отсчитываемая от некоторого произвольно выбранного уровня. Такое уравнение имеет решения вида $\delta r \propto \xi \propto e^{kx}$, где k — волновое число для стоячих волн, определяемое решением квадратного уравнения.

Рассматривая решение этого уравнения, можно выделить два случая. Первый — назовем его случаем (а) — характеризуется вещественными значениями k и имеет место при $\sigma\lambda_p/v_S < 1/2$, где $v_S = (\Gamma_1 P/\rho)^{1/2}$ — адиабатическая скорость звука, которая также принята постоянной в атмосфере. Пусть k_1 и k_2 — решения квадратного уравнения, и пусть $k_1 < k_2$; если записать $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, соответствующая волновому числу k, то имеем $\lambda_1 > \lambda_2$. Следовательно, решение k_1 связано с более длинными звуковыми волнами, чем k_2, и характеризуется более медленным ростом амплитуды с высотой, чем k_2. Можно показать, что при $\sigma\lambda_p/v_S \ll 1$ $\lambda_1 \gg \lambda_p$, поэтому такая ситуация соответствует «длинным» звуковым волнам. Подобным же образом получаем $\lambda_2 \approx 2\pi\lambda_p$; решение k_2 в этом случае соответствует «коротким» звуковым волнам.

Теперь необходимо исследовать, имеют ли эти решения физический смысл. Рассмотрим акустическую энергию на единицу объема. Эта энергия

пропорциоиальиа кииетической зиергии на едииицу объема, скажем K. Легко показать, что при $x \to \infty$ энергия $K_1 \to 0$, а $K_2 \to \infty$. Из-за расходимости величииы K_2 на бескоиечности решеине k_2, вероятно, не нмеет физнческого смысла (см., одиако, замечаиие в конце иастоящего раздела). Поэтому едииствеииое имеющее физический смысл решеиие в случае (а) таково:

$$\delta r \propto \exp(i\sigma t)\exp[\sigma^2\lambda_P^2/v_S^2)(x/\lambda_P)] \qquad (\sigma^2\lambda_P^2/v_S^2 \ll 1), \tag{8.17}$$

причем в свете иашнх упрощающих предположеиий даииое решеине ие справедливо прн $x/\lambda_P \gg 1$. Следовательно, экспоиеициальное поведеине смещеиия δr в выражеиии (8.17) не противоречнт иашим выводам, сделаниым в разд. 8.3 о том, что для стоячих воли, представляющих иитерес в случае пульсаций всей звезды, δr ие может претерпевать очень снльных измененнй в тоикнх атмосферных слоях.

Теперь мы рассмотрим случай (б): $\sigma\lambda_P/v_S > 1/2$. Здесь оба корня вышеупомянутого квадратиого уравиеиия являются комплексиыми. Комплексиые значения k соответствуют бегущим волнам, причем в общем случае одиа волиа распространяется к центру звезды, а другая — от цеитра. Поскольку с физической точки зрения допустимо существование только выходящих воли, решение, дающее волиы, распространяющиеся к центру, должно быть отброшеио. Можно показать также, что в случае (б) действительио пронсходит потеря зиергии звездой в форме бегущих акустических воли.

Таким образом, стоячие волиы в звездиых недрах могут существовать только в случае (а), т.е. прн $\sigma\lambda_P/v_S < 1/2$. Если запнсать $v_S = (\sigma/2\pi)\lambda$, где λ — длииа звуковых волн, соответствующих угловой частоте $2\pi/\Pi$ (Π — рассматриваемый период пульсаций),то условие существовання стоячих воли в звездиых иедрах имеет вид

$$\lambda > 4\pi\lambda_P, \tag{8.18}$$

где λ_P — высота однородной атмосферы.

Отметим, что диффереицирование уравиения (8.17) по r после небольших преобразоваиий приводит к уравиеиию (8.15) при $\beta = 1$, в котором величнна $3\Gamma_1 - 4$ замеиеиа иа Γ_1. Причииой такого различня является пренебрежеиие кривизиой атмосферы в иастоящем разделе. Если бы кривизиа учитывалась, то был бы получеи тот же миожитель, что н в уравнении (8.15) (см., иапример, [37, Appendix]).

Одиако для иизших мод пульсирующнх звезд имеем $\lambda \sim R$ (R — радиус звезды). Поэтому условие (8.18) прииимает следующий приближеный вид: $R \gg \lambda_P$. Но с помощью теоремы вириала можно показать, что в довольио общем случае отиошение λ_P/R по порядку величииы равио отношению виутреней зиергни иа едииицу массы иа поверхиости и в центре. Если рассматриваются обычные газовые звезды, в которых давление излучеиия не очеиь существеиио, то приведеииое утверждение озиачает, что для большиинства звезд

$$\lambda_P/R \sim \frac{\text{Температура иа поверхиости}}{\text{Температура в центре}} \sim 10^{-2} - 10^{-4}. \tag{8.19}$$

Поэтому условие (8.18), вероятно, с хорошей точностью выполняется для низших мод пульсаций большинства звезд. Однако для высших мод данное условие, возможно, не выполняется. Кроме того, наличие высокотемпературной короны могло бы привести к неполному отражению и, следовательно, к распространению волн в корону, особенно для высших мод (см., например, [491]). Более того, существование высокотемпературной короны или какие-то другие факторы могли бы при некоторых условиях повлечь за собой необходимость исследования решения k_2 в случае (а) (см., например, [286], а также ряд статей в [270]). Однако в данной части мы не будем проводить такое исследование.

8.5. Проблема линейных адиабатических радиальных пульсаций как задача о собственных значениях

Уравнение (8.6) — это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, и, значит, его решение должно включать две постоянные интегрирования. Однако данное уравнение является также линейным и однородным по ξ, следовательно, одна из постоянных должна остаться произвольной (если ξ — решение, то решением будет и величина $A\xi$, где A — произвольная постоянная). С физической точки зрения произвольным должно быть абсолютное значение амплитуды пульсаций ξ. Вторую же постоянную интегрирования, очевидно, можно использовать для того, чтобы добиться выполнения одного из двух граничных условий: в центре или на поверхности. Единственный оставшийся в распоряжении параметр — это σ, угловая частота пульсаций. Ее значение следует варьировать до тех пор, пока не будет удовлетворено другое граничное условие. Следовательно, существуют только определенные собственные частоты $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ и соответствующие собственные функции $\xi_0, \xi_1, \ldots$, которые удовлетворяют граничным условиям в центре и на поверхности. Вообще говоря, существует бесконечное множество собственных частот и соответствующих собственных функций, и значения собственных частот в общем не кратны значению самой низшей, или основной, собственной частоты σ_0. Собственная функция ξ_0 основной моды не имеет нулей или узлов в области $0 \leqslant r \leqslant R$, а собственная функция ξ_k для k-й моды имеет ровно k узлов в этой области. В данной части книги мы будем иметь дело главным образом только с основной или низшими модами (см. сноску в разд. 8.12в).

Приведенные утверждения (вместе с их доказательствами) следуют и из того факта, что уравнение (8.6) относится к уравнениям типа *Штурма — Лиувилля*, которые широко представлены в математической литературе (см., например, [282, ch. 9 — 11; 345, § 58]).

В работе [23] отмечены некоторые очень интересные и способствующие более ясному пониманию параллели между линейным адиабатическим волновым уравнением и уравнением Шредингера в квантовой механике. Еще раньше несколько соображений на эту тему были высказаны в статье [367].

8.6. Сотношение период — средняя плотность

В данном разделе мы покажем, что из линейного адиабатического волнового уравнения следует соотношение период — средняя плотность для пульсирующих звезд (см., например, гл. 2).

Это уравнение можно привести к безразмерному виду [явно мы здесь этого делать не будем, но см. ниже уравнение (8.58)], и тогда станет ясно, что уравнение содержит только один параметр. Этот параметр — безразмерное собственное значение, и этим собственным значением является, очевидно, квадрат безразмерной угловой частоты Ω:

$$\Omega^2 \equiv \sigma^2 R^3/GM. \tag{8.20}$$

Величине Ω^2 можно дать простую физическую интерпретацию: она равна отношению ускорения единичной массы на поверхности звезды, связанного с угловой частотой σ, к ускорению силы тяжести на этом уровне. Первое ускорение равно также центростремительному ускорению очень близкого спутника, движущегося вокруг звезды по круговой орбите радиуса R с угловой частотой σ. Для такой круговой орбиты ускорение должно быть равно ускорению силы тяжести на поверхности, поэтому в данном случае $\Omega^2 = 1$. Ниже мы покажем (разд. 8.9), что для пульсирующей звезды с $\Gamma_1 = 4/3$ всегда должно выполняться условие $\Omega^2 \geqslant 1$, т.е. период пульсаций всегда меньше периода обращения такого близкого спутника.

Если линейное адиабатическое волновое уравнение в безразмерной форме применить к семейству гомологических звезд (см., например, [146, Ch. 22]) с одинаковыми значениями показателя адиабаты Γ_1, то легко видеть, что для всех членов семейства применимо одно и то же значение Ω. Поскольку средняя плотность $\bar{\rho} \propto M/R^3$, а $\sigma = 2\pi/\Pi$ (где Π — период пульсаций), то соотношение (8.20) представляет собой формулировку ***соотношения период — средняя плотность*** $\Pi(\bar{\rho})^{1/2} =$ const для гомологических звезд с одинаковыми значениями Γ_1. Если выразить данное соотношение через пульсационную постоянную $Q = \Pi(\bar{\rho}/\bar{\rho}_{\odot})^{1/2}$ (здесь $\rho_{\odot}$ — средняя плотность Солнца, равная 1,41 г/см^3), то оно примет вид

$$Q_d = 0{,}1159/\Omega, \tag{8.21}$$

где индекс d означает, что величина Q выражена в сутках. Таким образом, только для гомологических звезд, имеющих одинаковые значения показателя адиабаты Γ_1, величина Q от звезды к звезде остается строго постоянной (для заданной моды).

Реальные звезды не гомологичны, а показатель адиабаты Γ_1 в общем не одинаков для всех звезд (кроме того, он и внутри звезды не является постоянным). Поэтому для заданной моды величина $\Pi(\bar{\rho})^{1/2}$ не остается строго постоянной от звезды к звезде. Однако оказывается (см. ниже разд. 8.12в), что данная величина обычно является лишь медленно меняющейся функцией параметров звезды. В работах [151, 207, 301], а также [103] приведены удобные аппроксимационные формулы, дающие зависимость Q от этих параметров. Неадиабатичность и нелинейность также оказывают лишь слабое влияние на

значенне Q, а значнт, н на пернод пульсаций — обычно не более нескольких процентов (см. нnже гл. 9 н 12). Следовательно, большннство сделанных в настоящей главе замечаний о пернодах справедлнвы в значнтельно более шнрокнх пределах, а не только в случае строго лннейных аднабатических колебанний.

8.7. Физическое рассмотрение

Лннейное аднабатическое волновое уравненне можно вывестн н нз чисто фнзнческнх соображенний, еслн представнть себе аднабатнческое смещенне тонкого слоя вещества нз состояння гидростатического равновесня, а затем рассчитать все действующие на смещенный слой возвращающие силы. Тогда мы увиднм, что σ^2 пропорционально силовой постоянной (коэффнцненту жесткостн) простого гармоннческого осциллятора.

Предположенне о постоянстве σ означает, что для всех слоев звезды силовая постоянная одна н та же: все слон нмеют однннаковую собственную частоту колебанний. В специальном случае, когда величнна ξ (пространственная часть смещення ζ) не завнснт от r_0, нензменность силовой постоянной может быть достнгнута только прн $m/r_0^3 = \text{const}$, т.е. еслн равновесная модель является однородной.

Еслн же отброснть предположенне о том, что ξ не завнснт от r_0, то мы будем нметь дело с произвольной равновесной моделью. Предположенне о постоянстве велнчнны σ^2 н в этом случае означает, что все слон звезды должны характернзоваться однннаковой снловой постоянной. Но поскольку теперь мы нмеем дело с пронзвольной моделью, для которой отношенне m/r_0^3 не является постоянным, то очевндно, что постоянство величнны ξ не прнведет к $\sigma^2 = \text{const}$. Тогда функцня $\xi(r_0)$ уже не будет пронзвольной: напротнв, она должна быть такой, чтобы обеспечнть постоянство величнны σ^2 для заданной моделн. Кроме того, величнна $\xi(r_0)$ должна подчнняться граннчным условням в центре н на поверхностн звезды. По причинам, указанным в разд. 8.5, только вполне определенные функцнн $\xi_k(r_0)$ — собственные функцнн — могут удовлетворять всем этнм условиям. Соответствующие *собственные значения* σ_k^2 — это едннственно возможные значення величнны σ^2, для которых все слон звезды характернзуются одной н той же силовой постоянной нлн одной н той же собственной частотой колебанний. Тот факт, что линейное аднабатнческое волновое уравненне является днфференциальным уравненнем, означает, что возвращающая снла, действующая на заданный слой звезды, а следовательно, н частота его колебанний, завнснт не только от велнчнны ξ, но также н от ее пронзводных. Поэтому поведенне одного слоя звезды связано с поведеннем другнх ее слоев н вся звезда пульснрует как еднное целое.

Можно представнть себе снтуацню, прн которой показатель адиабаты $\Gamma_{1,0}$ был бы меньше 4/3 в некоторой областн (нлн областях) звезды н больше 4/3 в остальной частн. (Именно такая снтуация должна преобладать в оболочках почтн всех звезд, см. [146, Ch. 20].) И тем не менее вещество в той областн (областях), где $\Gamma_{1,0} < 4/3$, останется динамнчески устойчивым, еслн устойчнва звезда в целом, т.е. еслн постоянная σ^2 положнтельна.

Поскольку величину σ^2 можно интерпретировать по существу как силовую постояииую, ее значение должно возрастать с увелнчеиием порядка моды, потому что более высоким модам соответствуют бóльшие ускореиия. Отсюда легко видеть, что величины $|d\xi/dr|$ и $|d^2\xi/dr^2|$ должиы возрастать с увеличеиием порядка моды, что подтверждается детальиымн расчетами. Более строго аиалогнчный вывод следует нз математической природы лииейиого адиабатического волиового уравнения, представляющего собой уравиеиие тнпа Штурма — Лиувилля (см., напрнмер, [282, § 10.3]). (Однако такое заключение не обязательио справедливо для нерадиальных колебаний, см. гл. 17.)

Теперь можно задать вопрос, откуда звезда «зиает», что оиа должиа пульсировать с одииаковым для всех своих частей значеннем σ^2? Сразу же можио ответить, что звезда в общем ие обязана пульсировать указанным образом, и действительио, вероятио, миогие реальиые звезды вообще ие испытывают таких колебаний (напрнмер, различные типы иеправильиых перемеииых). Однако в огромном большинстве звезд, включая классические цефеиды, перемеииые типа RR Лиры и W Девы, по-вндимому, все-таки происходят нменно такие простые пульсации, как если бы имелась только одна мода.

Чтобы попытаться объяснить это явлеине, предположим, что велнчииа σ^2 ие одинакова для всех слоев вещества н, кроме того, что величина $\zeta(r_0, t)$ является по существу произвольной функцией перемениых r_0 н t (лишь бы оиа удовлетворяла соответствуюшим граничным условиям). В таком случае движеиие будет хаотическим и можио ожидать крутых градиеитов температуры н давлеиия. Как мы увидим в разд. 8.8, произвольные движеиия можио представить суперпознцией «нормальных мод», т.е. собственных функций; хаотические двнжения обычно соответствуют наличию мод произвольно высокого порядка. При рассмотрении реальиых звезд следует отказаться от ндеализнрованиого предположения об адиабатических колебаниях — необходимо учитывать эффекты приращеиия н потерь тепла, а также влияиие сил треиия, обусловлеииых вязкостью. В общем можно ожидать, что оба эти эффекта будут относительио большими при иаличии крутых градиеитов температуры и давления.

Таким образом, можио предполагать, что в реальиой звезде, в которой движеиие первоиачально было хаотическим, быстрее всего будут «подавлеиы» моды самых высоких порядков, сопровождаемые самыми крутыми градиеитамн температуры н давлення. По прошествии достаточно длительиого времеии останутся, вероятио, только иесколько иизших мод илн же одна нз инх. Чтобы ответить, какая же мода (или моды) в конце коицов останется, иужио детальио проанализировать как механизмы затухания, так и все возможиые механизмы возбуждения, которые могут действовать в звезде. Если бы звезда была пульсациоиио устойчива отиосительно всех мод, то даже указаииая оставшаяся мода (или моды) в коице коицов была бы подавлена.

Итак, хаотические движения, по-видимому, приводят к диссипации эиергии, и поэтому вследствие иеадиабатических эффектов и треиия оии затухают быстрее, чем упорядочениые двнжеиия. Следовательио, в общем можио ожидать, что в природе упорядочеииое движеиие преобладает над хаотическим.

Такое предположение может служить ответом на поставленный выше вопрос и может свидетельствовать в пользу существования пульсирующих звезд, в которых, по всей вероятности, происходят довольно простые движения.

8.8. Обсуждение собственных значений: математический подход

Собственные функции и собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения обладают рядом важных свойств. Например, собственные функции ξ_k ортогональны между собой при условии, что интегрирование ведется по $dI = r^2 dm$, а все собственные значения σ_k^2 вещественны. Эти свойства обусловлены самосопряженным (эрмитовым) характером линейного адиабатического волнового уравнения.

Для k-й моды это уравнение имеет вид (8.6) с $\xi(r) = \xi_k(r)$ и зависимостью от времени, даваемой соотношением (8.5) ($\sigma \equiv \sigma_k$). Уравнение (8.6) можно записать в виде

$$\mathscr{L}(\xi_k) = \sigma_k^2 \xi_k \ , \tag{8.22}$$

где линейный оператор $\mathscr{L}$ определяется следующим соотношением:

$$\mathscr{L}(y) \equiv -\frac{1}{\rho r^4}\frac{d}{dr}(\Gamma_1 P r^4 dy/dr) - \frac{1}{\rho r}\left\{\frac{d}{dr}[(3\Gamma_1 - 4)P]\right\} y. \tag{8.23}$$

Важное свойство оператора $\mathscr{L}$ состоит в том, что он является *эрмитовым* (или *самосопряженным*), если на поверхности звезды (при $r = R$, где R — равновесный радиус) выполняется условие $P = 0$. Это означает, что если u и v — «достаточно регулярные» функции, то справедливо равенство

$$\int_M u^*(\mathscr{L} v) r^2 dm = \left[\int_M v^*(\mathscr{L} u) r^2 dm\right]^* = \int_M v\,(\mathscr{L} u)^* r^2 dm, \tag{8.24}$$

где интегрирование проводится по полной массе звезды M, а звездочка обозначает комплексно сопряженные величины.

Самосопряженность оператора $\mathscr{L}$ можно проверить, подставив выражение (8.23) для $\mathscr{L}$ в первый интеграл соотношения (8.24) и использовав при этом соотношение $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Интегрируя затем по частям с учетом равенства нулю давления P на поверхности звезды и замечая, что оператор $\mathscr{L}$ — вещественный, мы видим, что функции u^* и v в первом интеграле в уравнении (8.24) можно менять местами, не изменяя при этом значения интеграла. Тем самым доказывается самосопряженность оператора $\mathscr{L}$, определенного выражением (8.23).

Из самосопряженности оператора $\mathscr{L}$ следует вещественность всех его собственных значений σ_k^2, что хорошо известно тем, кто изучал квантовую механику (см. также разд. 15.2). Положительные значения σ_k^2 (величина σ_k вещественна) соответствуют колебаниям с постоянной (во времени) амплитудой, тогда как отрицательные значения σ_k^2 (величина σ_k мнимая) соответству-

ют дииамической иеустойчивости. (Как показал Кокс [132], такая иеустойчивость иеизбежио приводит либо к коллапсу, либо к иеограиичеииому расширенню.)

Поэтому в рассматриваемом случае ие существует таких решеиий лииейиого адиабатического волиового уравиеиня, которые бы соответствовалн колебаниям с положительиым нлн отрнцательиым затухаинем (когда σ_k комплексиое) (однако если в иевозмущеииой модели присутствуют движеиия, то решеиия уравиеиия, характеризуемые комплексиыми зиачеииями σ_k, все-таки существуют, см. гл. 15 и разд. 19.1). Приведеииое утверждеиие еще раз подчеркивает, что теория полиостью коисервативиых адиабатических колебаиий обычио ие в состояиии дать прямой ииформации о пульсациоиной иеустойчивости звезды.

Легко также продемоистрировать ортогоиальиость собствеииых функций, но мы этого здесь делать ие будем (см. разд. 15.2). Если ξ_k н ξ_l — иекоторые произвольиые собствеииые функцни, то условие ортогоиальиости можио выразить следующим образом:

$$\int\limits_M \xi_k^* \xi_l r^2 dm = J_k \delta_{kl}, \tag{8.25}$$

где

$$J_k \equiv \int\limits_M |\xi_k|^2 r^2 dm = \int\limits_I |\xi_k|^2 dI \tag{8.26}$$

есть *осцилляторный момент инерции* для k-й моды, δ_{kl} — символ Кроиекера ($\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$, $\delta_{kk} = 1$), а

$$I \equiv \int\limits_M r^2 dm \tag{8.27}$$

есть момеит иерцнн звезды отиосительио цеитра.

Более общие решеиия лииейиого адиабатического (или иелииейиого и иеадиабатического) волиового уравиеиия всегда можио выразить через собствеиные фуикции ξ_k оператора $\mathscr{L}$, поскольку последовательность этих собственных фуикций является полиой (см., иапример, [282, Ch. 11]). Таким образом, если $\zeta(r, t)$ — произвольиая функция, для которой существует иитеграл

$$\int\limits_M |\zeta(r, t)|^2 r^2 dm,$$

то можио записать

$$\zeta(r, t) = \sum_k q_k(t) \xi_k(r), \tag{8.28}$$

где функции $q_k(t)$ зависят только от времеии и вследствие ортогональиости собствеииых функций ξ_k определяются для любых k посредством соотиошеиия

$$q_k(t) = (1/J_k) \int\limits_M \xi_k^*(r) \zeta(r, t) r^2 dm. \tag{8.29}$$

8.9. Условия существования осциллирующих решений

В этом разделе будут исследованы некоторые условия существования осциллирующих решений линейного адиабатического волнового уравнения для произвольной сферической модели звезды при основных допущениях, сделанных в данной части. Обсуждение многих вопросов, рассматриваемых в настоящем разделе, можно найти также в статье Леду и Вальравена [345, § 60].

Запишем сначала выражение для собственного значения σ_k^2 в виде интеграла по всей звезде:

$$\sigma_k^2 = (1/J_k) \int_M \xi_k^* (\mathscr{L}\xi_k) r^2 dm. \tag{8.30}$$

Подробно мы рассмотрим лишь случай, когда показатель адиабаты Γ_1 постоянен по всей звезде. Тогда уравнение (8.30) [после подстановки в него выражения (8.23) для оператора $\mathbb{R}$ и небольших преобразований] можно записать в виде суммы двух интегралов, один из которых для звезды в гидростатическом равновесии всегда положителен или равен нулю, а другой положителен при $\Gamma_1 > 4/3$. Таким образом, если $\Gamma_1 > 4/3$, то для всех k $\sigma_k^2 > 0$. Поэтому при $\Gamma_1 > 4/3$ для всех мод существуют осциллирующие решения для любой равновесной модели звезды.

Если $\Gamma_1 = 4/3$, то второй из вышеупомянутых интегралов обращается в нуль, откуда следует, что для любых k $\sigma_k^2 \geqslant 0$. Однако для основной моды ($k = 0$) можно показать исходя из вариационного свойства линейного адиабатического волнового уравнения (разд. 8.10), что в данном случае справедливо строгое равенство $\sigma_0^2 = 0$ (явно мы этого показывать не будем). Таким образом, при $\Gamma_1 = 4/3$ любая звезда находится в состоянии *безразличного равновесия* относительно колебаний в основной моде ($\sigma_0^2 = 0$). Из вариационного свойства следует также, что в рассматриваемом случае $d\xi_0/dr = 0$, т.е. ξ_0 не зависит от r. Поэтому для основной моды смещение $(\delta r)_0$ уровня, соответствующего заданному значению лагранжевой переменной, пропорционально его расстоянию r от центра, т.е. имеет место гомологическое расширение или сжатие с произвольным характерным временем.

Поскольку линейное адиабатическое волновое уравнение — это уравнение типа Штурма — Лиувилля, собственные значения можно упорядочить так, чтобы $\sigma_k^2 > \sigma_0^2$, где $k > 0$ (см., например, [282, Ch. 10]). Отсюда следует, что для $\Gamma_1 \geqslant 4/3$ $\sigma_k^2 > 0$ ($k > 0$). Этот результат означает, что безразличное равновесие при $\Gamma_1 = 4/3$ существует только для основной моды; все более высокие моды являются осциллирующими. Однако если модель находится в состоянии безразличного равновесия по отношению к основной моде, то высшие моды обычно не представляют большого интереса.

Если $\Gamma_1 = \mathrm{const}$ и меньше $4/3$, то вновь исходя из вариационного свойства можно показать, что $\sigma_0^2 < 0$ по крайней мере для основной моды. Следовательно, звезда динамически неустойчива по меньшей мере, в основной моде, а, возможно, и в нескольких ближайших модах. Однако поскольку по порядку величины $|d\xi_k/dr|^2 \sim |\xi_k|^2/\lambda_k^2$, где λ_k — «длина волны» k-й моды, и поскольку один из двух вышеупомянутых интегралов содержит $1/\lambda_k^2$, то с уве-

личением k интеграл растет, а поэтому растет и σ_k^2. С другой стороны, второй из этих интегралов не очень чувствителен к порядку моды. Следовательно, даже при $\Gamma_1 < 4/3$ для достаточно высоких мод должны существовать осциллирующие решения.

К такому же выводу можно прийти и из интуитивных соображений. Заметим, что один из двух интегралов содержит множитель $(3\Gamma_1 - 4)$, который обусловлен, по существу, силами гравитации и сферической симметрией задачи; второй же интеграл связан в основном с сжимаемостью (объемной упругостью) газа (разд. 8.1). Ясно, что динамическая неустойчивость вызывается первым из этих интегралов. Когда величина λ_k^2 становится малой по сравнению с радиусом R, очевидно, что силы упругости оказываются более важными, чем силы гравитации и эффект сферической симметрии. В данном пределе мы имеем дело с плоскими звуковыми волнами, для которых существенны только силы упругости. Как и раньше, осциллирующие решения для высших мод, вероятно, не представляют большого интереса, если звезда динамически неустойчива в основной моде.

Если $\Gamma_1 \neq \text{const}$, то рассмотрение становится более сложным, и в отношении динамической неустойчивости уже нельзя сделать таких четких выводов, как раньше (см., например, [345, § 58]). Тем не менее на данном этапе имеет смысл переписать выражение (8.30) для σ_k^2 через некоторые усредненные величины.

Во-первых, определим следующее среднее:

$$\langle \Gamma_1 r^2 |d\xi_k/dr|^2 \rangle \equiv \int_V \Gamma_1 P r^2 |d\xi_k/dr|^2 dV \Big/ \int_V P dV, \tag{8.31}$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ — элемент объема, а интегралы взяты по всему объему V звезды. Определим также среднее значение величины $|\xi_k|^2$:

$$\langle |\xi_k|^2 \rangle \equiv I^{-1} \int_M |\xi_k|^2 r^2 dm = I^{-1} \int_I |\xi_k|^2 dI = J_k/I, \tag{8.32}$$

где J_k — осцилляторный момент инерции, а I — момент инерции звезды относительно центра [см. соотношения (8.26) и (8.27) соответственно].

Среднее значение величины $3\Gamma_1 - 4$ определим посредством соотношения

$$\int_0^R (3\Gamma_1 - 4) P \frac{d}{dr} (4\pi r^3 |\xi_k|^2)\, dr = \overline{(3\Gamma_1 - 4)} \int_0^R P \frac{d}{dr} (4\pi r^3 |\xi_k|^2)\, dr. \tag{8.33}$$

И наконец, определим еще один тип среднего значения величины $|\xi_k|^2$:

$$\int_\Omega |\xi_k|^2 d(-\Omega) = (\overline{|\xi_k|^2})(-\Omega), \tag{8.34}$$

где Ω — гравитационная потенциальная энергия звезды в равновесном состоянии [см. уравнение (2.11)] [не путать с безразмерной угловой частотой колебаний, определенной выражением (8.20)]. Величина $d(-\Omega)$ — это как раз подынтегральное выражение в уравнении (2.11).

Соберем теперь различные члены, используем теорему вириала в виде

(2.10), проинтегрируем несколько раз по частям и сделаем несколько других преобразований. В результате получим

$$\sigma_k^2 = \{\langle \Gamma_1 r^2 |d\xi_k/dr|^2/3\rangle/\langle|\xi_k|^2\rangle + (\overline{3\Gamma_1 - 4})(\overline{|\xi_k|^2})/\langle|\xi_k|^2\rangle\}\,(-\Omega/I) \equiv \tag{8.35}$$

$$\equiv \alpha(-\Omega/I), \tag{8.36}$$

что служит также определением безразмерной величины α.

Отметим, что, за исключением довольно высоких мод, α обычно порядка единицы, так как два типа средних значений $|\xi_k|^2$ в соотношении (8.35), вероятно, несильно отличаются друг от друга. Кроме того, поскольку $|d\xi_k/dr|^2 \sim |\xi_k|^2/\lambda_k^2$, где λ_k — «длина волны» k-й моды, первое слагаемое в фигурных скобках в (8.35) должно быть порядка R^2/λ_k^2 (R — радиус звезды), т.е. приблизительно равно квадрату числа «длин волн», укладывающихся на диаметре звезды. Следовательно, можно ожидать, что для довольно высоких мод $\sigma_k^2 \sim (R^2/\lambda_k^2)\sigma_0^2$. Отметим также, что второй множитель $(-\Omega/I)$ определяется равновесной моделью звезды и не зависит от ее пульсационных свойств.

Тот факт, что, согласно соотношению (8.36), $\sigma_k^2 \sim (-\Omega/I)$ (по крайней мере для низших мод) иллюстрирует общее сходство (радиальных) звездных пульсаций с обычными колебательными системами.

Наконец, можно привести еще две формы соотношения (8.35), которые наглядны и полезны. Во-первых, отметим, что в выражении для гравитационной потенциальной энергии Ω текущее значение массы m можно записать через $\bar{\rho}\,(r)$ — *среднюю плотность вещества внутри сферы радиуса r*:

$$\bar{\rho}\,(r) \equiv m/(4/3\,\pi r^3). \tag{8.37}$$

Тогда получаем

$$\sigma_k^2 = \alpha \cdot 4\pi G\bar{\rho}\,\langle\bar{\rho}\,(r)/\bar{\rho}\rangle/3, \tag{8.38}$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность всей звезды, а угловые скобки обозначают соответствующее [аналогичное (8.32)] среднее от указанной величины, взятое по всей звезде.

Соотношение (8.38) показывает, что $\sigma_k^2 \sim G\bar{\rho}$ по крайней мере для достаточно малых k, а это как раз и есть упоминавшееся выше соотношение период — средняя плотность (см. гл. 2 и разд. 8.6). Кроме того, согласно (8.38), σ_k^2 возрастает с увеличением степени концентрации массы к центру, т.е. с ростом $\langle\bar{\rho}(r)/\bar{\rho}\rangle$. С физической точки зрения, звезда с большой концентрацией массы «крепче связана», чем звезда с малой концентрацией, и интуитивно можно ожидать более высокой частоты пульсаций в первом случае, чем во втором. Однако зависимость σ_k^2 от степени концентрации массы не монотонна (см. разд. 8.12в); в формуле (8.38) это учитывается посредством множителя α.

Во-вторых, снова используем теорему вириала в виде (2.10) и выразим величину $-\Omega$ через массу звезды M и через определенные подходящим образом средние значения по всей звезде показателя адиабаты Γ_1 и адиабатической

скорости звука v_s. Запишем также $I = M\langle R^2\rangle$, где $\langle R^2\rangle^{1/2}$ — величина порядка R — есть своего рода гирорадиус звезды. В результате получим

$$\sigma_k^2 = \alpha\cdot 3\langle 1/\Gamma_1\rangle\langle v_s^2\rangle/\langle R^2\rangle. \tag{8.39}$$

Это соотношение показывает, что по крайней мере для низших мод (малые k) $\sigma_k^2 \sim \langle v_s^2\rangle/\langle R^2\rangle$, т.е. соответствующий период пульсаций $\Pi_k \sim (\langle R^2\rangle/\langle v_s^2\rangle)^{1/2}$. Таким образом, как и утверждалось в гл. 2, период пульсаций звезды в одной из низших мод по порядку величины действительно равен времени распространения звуковой волны вдоль звездного диаметра.

Заканчивая раздел, заметим, что уравнение (8.35) можно использовать для определения нижнего предела σ_k^2 для звезды с заданными средней плотностью $\bar\rho$ и постоянным значением Γ_1. Если предположить, что средняя плотность $\bar\rho(r)$ внутри сферы радиуса r не возрастает наружу, то получим

$$\sigma_k^2 \geqslant (3\Gamma_1 - 4)\, 4\pi G\bar\rho/3 \qquad \text{для любых } k, \tag{8.40}$$

где нижний предел равен σ^2 для основной моды однородной модели с такими же Γ_1 и $\bar\rho$, как и у рассматриваемой звезды.

8.10. Вариационное свойство собственных значений

Выведенные в разд. 8.9 выражения для σ_k^2, казалось бы, представляют чисто академический интерес, если не считать их роли для облегчения понимания физической картины пульсаций. Действительно, чтобы оценить интегралы в этих выражениях, необходимо знать собственные функции $\xi_k(r)$, для нахождения которых обычно должны быть заранее известны собственные значения σ_k^2, или же их можно получить одновременно с нахождением собственных значений. Поэтому возникает вопрос о практической пользе приведенных выражений.

В этом разделе мы покажем, что собственные значения подчиняются вариационному принципу, поэтому эти выражения (точнее, выражения, очень похожие на приведенные в разд. 8.9) очень удобны для оценок σ_k^2, когда не известны собственные функции ξ_k, т.е. не решена полная задача о собственных значениях. Как хорошо известно, вариационный принцип вытекает в конечном счете из самосопряженности оператора $\mathscr{L}$ (см. разд. 8.8). Наше доказательство вариационного принципа в некоторой степени следует доказательству, приведенному в [356].

Пусть $u(r)$ — любая достаточно регулярная функция равновесного текущего радиуса r. Введем вещественное число Σ^2:

$$\Sigma^2 \equiv J^{-1}\int_M u^* \mathscr{L}(u) r^2 dm, \tag{8.41}$$

где J определяется в соответствии с выражением (8.26) с заменой в нем ξ_k на u. Линейный оператор $\mathscr{L}$ определяется соотношением (8.23), а интегрирование проводится по полной массе звезды M.

Представим теперь, что величина $u(r)$ для любого r испытывает произвольное, но малое изменение $\Delta u(r)$. Можно ожидать, что при такой вариации

величины $u(r)$ число Σ, определенное формулой (8.41), изменится на $\Delta\Sigma$. Изменение $\Delta\Sigma$ можно вычислить, если проварьировать уравнение (8.41), считая оператор Δ обычным дифференциальным оператором. Отметим, что оператор Δ можно внести под знак интеграла, поскольку эта вариация не относится к величине r или к соответствующему значению текущей массы m, т.е. при варьировании r остается фиксированным.

Умножая (8.41) на J и беря вариацию, получаем выражение, связывающее величины $\Delta\Sigma$, u, u^*, Δu, Δu^*, $\mathscr{L}(u)$ и $\Delta\mathscr{L}(u)$. Поскольку оператор $\mathscr{L}$ линейный, $\Delta\mathscr{L}(u) = \mathscr{L}(\Delta u)$. Кроме того, оператор $\mathscr{L}$ самосопряженный, и поэтому в указанном выражении можно менять местами величины Δu и u^*. Наконец, учтем, что оператор $\mathscr{L}$ и величина Σ^2 вещественны. В результате имеем

$$2J\,\Sigma\Delta\Sigma + 2\mathrm{Re}\,\{\int_M (\Delta u^*)[\Sigma^2 u - \mathscr{L}(u)]r^2 dm\} = 0, \tag{8.42}$$

где Re $\{\ldots\}$ — вещественная часть указанной величины.

Итак, если $u(r)$ является решением уравнения

$$\Sigma^2 u - \mathscr{L}(u) = 0, \tag{8.43}$$

то $\Delta\Sigma = 0$ даже при $\Delta u^* \neq 0$. И обратно, если $\Delta\Sigma = 0$, а $\Delta u^*(r)$ — произвольная (но малая) функция r, то $u(r)$ должно быть решением уравнения (8.43). Но уравнение (8.43) — это как раз линейное адиабатическое волновое уравнение, откуда $u(r) \equiv \xi_k(r)$ и $\Sigma^2 = \sigma_k^2$, т.е. имеем соответственно собственную функцию и собственное значение линейного адиабатического волнового уравнения для k-й моды. Итак, мы доказали следующее: те решения уравнения (8.43), для которых величина Σ имеет экстремум ($\Delta\Sigma = 0$) относительно произвольно малых изменений функции $u(r)$, являются *собственными функциями* $\xi_k(r)$, а связанные с такими решениями собственные значения — соответствующими *адиабатическими собственными значениями* σ_k^2 для k-й моды.

Практическая польза применения вариационного принципа обусловлена тем, что при непрерывном изменении функции $u(r)$ величина Σ^2 проходит через истинный экстремум и это экстремальное значение $\Sigma^2 = \sigma_k^2$ достигается тогда, когда $u(r) \equiv \xi_k(r)$. Следовательно, для заданной пробной функции $u(r) \approx \xi_k(r)$ ошибка в величине Σ^2 много меньше, чем ошибка в $u(r)$. Поэтому даже очень грубая пробная функция $u(r)$ часто обеспечивает весьма точное приближение к значению σ_k^2 (см. разд. 8.15). Иначе говоря, если функция $u(r)$ всюду отличается от $\xi_k(r)$ на малую величину порядка ε, то Σ^2 отличается от σ_k^2 на малую величину порядка ε^2.

Некоторые приложения вариационного принципа представлены в [235, Ch. 15]; см. также [345, § 58].

Вариационный принцип особенно полезен для основной моды ($k = 0$) радиальных колебаний, поскольку в этом случае величина Σ^2 подчиняется принципу минимума (частный случай экстремума). Это заключение вытекает из самой природы линейного адиабатического волнового уравнения, являющегося уравнением типа Штурма — Лиувилля, и, в частности, из того факта, что собственные значения в этом случае можно упорядочить (см., например, [282, Ch. 10]).

Итак, сформулируем принцип минимума в приложении к основной моде радиальных колебаний: функция $u(r)$, которая приводит к самому глубокому возможному минимуму величины Σ^2, — это основная собственная функция, а соответствующий минимум Σ^2 — это основное собственное значение σ_0^2.

Принцип минимума можно использовать для доказательства некоторых утверждений, высказанных в разд. 8.9 (однако здесь мы не будем приводить эти доказательства в явном виде). Во-первых, можно доказать, что независимо от модели звезды $\sigma_0^2 = 0$ и $\xi_0(r) = \text{const}$ при $\Gamma_1 = 4/3$, а при $\Gamma_1 < 4/3$ $\sigma_0^2 < 0$. (Однако, согласно общей теории относительности, динамическая неустойчивость возникает при значении Γ_1, несколько большем $4/3$, как впервые показал Чандрасекар [74 — 76]*; см. также разд. 19.5.) Во-вторых, из указанного принципа можно получить уравнение (8.3) для угловой частоты основной моды однородной модели, имеющей постоянную плотность $\rho\,(r) = \bar{\rho}$ по всему объему ($\bar{\rho}$ — средняя плотность) и постоянное значение Γ_1; кроме того, можно показать, что для этой модели $\xi_0(r) = \text{const}$.

Наконец, как отмечали Леду и Вальравен [345, § 60], принцип минимума позволяет установить верхний предел на значение σ_0^2. Рассмотрим случай $\Gamma_1 \neq \text{const}$. Величину Σ^2 можно записать здесь в форме уравнения (8.36). Взяв простую пробную функцию $u(r) = \text{const}$ и использовав принцип минимума, получим

$$\sigma_0^2 \leqslant (\overline{3\Gamma_1 - 4})_{u\,=\,\text{const}}(-\Omega/I) \equiv \Sigma^2_{u\,=\,\text{const}}, \tag{8.44}$$

где для величины $(\overline{3\Gamma_1 - 4})_{u\,=\,\text{const}}$ из (8.33) легко получить простое выражение (в явном виде мы этого делать не будем).

Итак, если $\Gamma_1 = \text{const}$, то величина σ_0^2 должна быть заключена в интервале

$$(3\Gamma_1 - 4)\, 4\pi G\bar{\rho}/3 \leqslant \sigma_0^2 \leqslant \Sigma^2_{u\,=\,\text{const}}, \tag{8.45}$$

где нижний предел относится к однородной модели (см. (8.40)), а верхний определяется соотношением (8.44) при $\Gamma_1 = \text{const}$.

8.11. Физическая интерпретация некоторых выражений

В настоящем разделе мы рассмотрим в основном физический смысл интегральных выражений на примере уравнения (8.30) для квадрата собственной частоты σ_k^2 k-й моды линейных адиабатических радиальных пульсаций. Как показали Леду и Вальравен [345, § 59], вариационное свойство собственных значений линейного адиабатического волнового уравнения (см. разд. 8.10) соответствует тому, что звезда как механическая система должна подчиняться принципу Гамильтона в классической механике.

Поскольку в обсуждаемые выражения входят квадраты малых величин, нужно быть очень внимательным при использовании комплексных обозначений. Например, $\text{Re}\,(\zeta^2) \neq [\text{Re}(\zeta)]^2$.

*С. А. Каплан (Ученые записки Львовского университета им. И. Франко, 15, вып. 4, 109, 1949) показал, что этот эффект приводит к уменьшению предельной массы белого карлика. — *Прим. ред.*

Относительное смещение $\zeta \equiv \delta r/r$ можно записать в следующем виде:

$$\zeta(r, t) = \xi(r)e^{i\sigma t} = |\xi(r)|\, e^{i\phi(r)}e^{i\sigma t}, \tag{8.46}$$

где $|\xi|$ — модуль смещения ζ, а ϕ — *фаза* смещения, которая в общем случае является функцией r, но в случае чисто стоячих волн от r не зависит. Поэтому записывая, например, ζ^2, мы подразумеваем $[\mathrm{Re}(\zeta)]^2$.

Вычислим теперь полную кинетическую энергию $\mathscr{T}$ радиально пульсирующей звезды, все еще рассматривая чисто осциллирующие решения (σ вещественно):

$$\mathscr{T} = \int\limits_M \tfrac{1}{2}\, \{\partial\, [\mathrm{Re}(\zeta)]/\partial t\}^2 r^2 dm, \tag{8.47}$$

где интегрирование проводится по всей массе звезды. Можно показать, что $\mathscr{T}$ как функция времени может обратиться в нуль только в случае стоячих волн, причем дважды в течение каждого периода пульсаций. Однако в общем случае минимальное значение $\mathscr{T}$ положительно, т.е. полная кинетическая энергия в течение периода никогда не обращается в нуль; этого и следует ожидать, если движение не имеет характера стоячей волны. В любом случае среднее значение $\bar{\mathscr{T}}$ полной кинетической энергии за период $\Pi = 2\pi/\sigma$ равно

$$\bar{\mathscr{T}} = \tfrac{1}{4}\sigma^2 \int\limits_M |\xi|^2 r^2 dm. \tag{8.48}$$

Учитывая (8.26), получаем

$$\sigma^2 J = 4\bar{\mathscr{T}}. \tag{8.49}$$

Следовательно, левая часть уравнения (8.30) (после умножения на J_k) равна $4\bar{\mathscr{T}}_k$, т.е. она в 4 раза больше полной средней кинетической энергии k-й моды. (Ниже мы будем опускать индекс k, поскольку все последующие рассуждения справедливы для любых k.)

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (8.30) (после умножения на J_k). Чтобы дать ей физическую интерпретацию, вычислим полную работу, совершенную силой, обусловленной наличием градиента давления, и силой тяготения, которые действуют на звезду при небольшом отклонении ее от состояния гидростатического равновесия*.

Предположим, что заданный слой звезды, равновесный радиус которого равен r_0, уже смещен от равновесного положения на расстояние $\delta r' \equiv \eta$. С точностью до величин 1-го порядка малости можно рассчитать полную силу, действующую на слой в результате такого смещения и отнесенную, скажем, к единице массы. Тогда работа (на единицу массы), совершаемая над слоем при его дальнейшем смещении на расстояние $d\eta$, будет равна произведению указанной силы на $d\eta$. После небольших преобразований с использованием линеаризованного уравнения неразрывности мы получим выражение, в которое входит, в частности, $d(\delta P/P_0)$. Исключим эту величину с помощью уравнения

*Сюда не включается работа, совершенная в результате расширения или сжатия массовых слоев; т.е. рассматривается только та работа, которая может проявляться как кинетическая энергия (см. разд. 4.2).

энергии (7.8), в котором используем равенство (7.10) (таким образом, будем считать процессы термодинамически обратимыми). Наконец, проинтегрируем полученное выражение по полному смещению $\delta r\ (r_0, t) = \zeta r_0$ и по всей массе звезды M. Полная работа, совершенная над звездой силами, сопровождающими такое смещение, определится тогда суммой нескольких интегралов по всей звезде, включающих величины ζ, $\delta\rho/\rho_0$, вариацию энтропии и субстанциональную производную этой вариации.

Отметим, что лишь та часть работы, в которую входят ζ и $\delta\rho/\rho_0$, действительно является консервативной, т.е. зависит от конечного смещения и не зависит от его траектории или от способа, каким это конечное смещение было достигнуто. Следовательно, указанная часть работы обладает свойствами, присущими потенциальной энергии. Значения оставшихся членов зависят от того, какой теплообмен с окружающей средой происходил во время смещения и, следовательно, от пути, выбранного для достижения конечного смещения. Поэтому данные члены не являются консервативными в вышеупомянутом смысле. Они представляют собой работу, совершенную над звездой неадиабатическими неконсервативными силами, действующими во время смещения.

Согласно изложенному, запишем полную работу W в виде

$$W = -\delta\Phi + \text{неадиабатические члены}, \tag{8.50}$$

где с точностью до малых величин второго порядка

$$\delta\Phi \equiv \int_M [\Gamma_{1,0}P_0(\delta\rho/\rho_0)^2/2\rho_0 - 2GM\zeta^2/r_0]\, dm. \tag{8.51}$$

Величина $\delta\Phi$ — это эффективная потенциальная энергия звезды в возмущенном состоянии, причем $\delta\Phi = 0$ соответствует состоянию гидростатического равновесия. Знак минус в уравнении (8.50) использован потому, что потенциальная энергия системы всегда (если не считать произвольно устанавливаемого нульпункта) принимается равной работе против действующих на систему сил.

Чтобы было легче понять, какой знак будет иметь величина $\delta\Phi$, определенная соотношением (8.51), можно выразить $\delta\Phi$ только через $\zeta = \delta r/r_0$ и $\partial\zeta/\partial r_0$. Используем линеаризованное уравнение неразрывности, раскроем квадратные скобки и проинтегрируем по частям с учетом того, что $P = 0$ на поверхности звезды. После небольших преобразований в результате получим (опуская индекс 0)

$$\delta\Phi = \tfrac{1}{2}\int_0^R \{4\pi\Gamma_1 Pr^4(\partial\zeta/\partial r)^2 - 4\pi r^3\zeta^2 d\,[(3\Gamma_1 - 4)P]/dr\}dr. \tag{8.52}$$

Напомним, что величина $\zeta\ (r, t)$ здесь по существу произвольная, но вещественная функция расстояния r и времени t.

Отметим, во-первых, что если $\Gamma_1 = \mathrm{const} > 4/3$, то $\delta\Phi > 0$ для любого смещения $\zeta \neq 0$ (при условии, что в невозмущенном состоянии звезда находится в гидростатическом равновесии). Кроме того, при этом же условии отсутствие членов первого порядка в выражении для $\delta\Phi$ означает, что в первом

прнблнженин пронзводная $\delta\Phi$ по «смещенню» прн $\zeta = 0$ равна нулю. Следовательно, велнчнна $\delta\Phi$ нмеет нстнннный мнннмум относнтельно любого возможного смещення нз состояния гидростатнческого равновесия (н это мнннмальное значенне равно нулю).

Во-вторых, прн $\Gamma_1 = \text{const} \leqslant 4/3$ $\delta\Phi \leqslant 0$, еслн смещенне $\zeta(r, t)$ является постоянным вдоль раднуса н пронзводная $\delta\Phi$ по «смещенню» снова равна нулю прн $\zeta = 0$. Такнм образом, еслн вдоль радиуса $\zeta(r, t) = \text{const}$ нлн изменяется достаточно медленно, то возможным состояннем является лнбо безразлнчное равновесие с пронзвольным характерным временем, лнбо динамнческая неустойчнвость. Однако еслн градненты смещення $\zeta(r, t)$ достаточно круты, то велнчнна $\delta\Phi$ может быть положнтельной даже прн $\Gamma_1 \leqslant 4/3$. Этот вывод не протнворечнт нашнм предыдущим результатам, поскольку в рассматрнваемом случае велнчнна $\zeta(r, t)$ не обязательно является собственной функцией лннейного аднабатического волнового уравнения. Действнтельно, сделанный вывод представляется возможным, так как известно, напрнмер, что достаточно высокне моды лннейного аднабатнческого волнового уравнення дннамнческн устойчнвы даже прн $\Gamma_1 < 4/3$.

Чтобы завершнть обсужденне уравнення (8.30), возьмем от велнчнны $\delta\Phi$, представленной уравненнем (8.52), среднее по временн за полный пернод $\Pi = 2\pi/\sigma$, счнтая двнженне строго пернодическнм с угловой частотой σ. Помня о предостережениях, касающихся обозначенний комплексных велнчнн, получаем

$$\overline{\delta\Phi} = 1/4\int_M \xi^* \mathscr{L}(\xi) r^2 dm, \tag{8.53}$$

где $\mathscr{L}$ — лннейный оператор, определенный соотношеннем (8.23).

Таким образом, мы нмеем следующую фнзнческую ннтерпретацню уравнення (8.30):

$$4\bar{\mathscr{T}} = 4\overline{\delta\Phi}, \tag{8.54}$$

т.е. в колебательном двнженнн средняя кинетнческая энергия равна средней потенциальной энергнн. Отметим, что хотя уравненне (8.30) прнменяется специально для собственных значенний σ_k^2 н собственных функций $\xi_k(r)$ лннейного аднабатнческого волнового уравнения, наша ннтерпретация этого уравнения, представленная соотношеннем (8.54), не требует, чтобы велнчнны σ^2 н $\xi(r)$ былн соответственно собственным значеннем н собственной функцией такого уравнення.

Результат (8.54) является довольно общим,н его нногда называют *принципом Рэлея*. Он устанавливает, что в любой колебательной снстеме частота колебанний подстранвается такнм образом, чтобы среднне кинетическая н потенцнальная энергин былн равны. Для возмущення пронзвольной формы $\xi(r)$ это уравненне дает простой н эффективный метод оценки частоты колебанний осциллнрующей системы (см., напрнмер, [570]).

Полная пульсационная энергня звезды равна

$$\Psi = \mathscr{T} + \delta\Phi, \tag{8.55}$$

прнчем $\Psi = 0$ в статнческом состояинн звезды. Средиее от Ψ за период будет равно

$$\bar{\Psi} = 2\bar{\mathcal{T}} = 2\overline{\delta\Phi}. \tag{8.56}$$

Для стоячих волн полиая пульсационная энергия Ψ строго постоянна, н она поочередно превращается нз чисто кинетнческой в чисто потеициальную, как для простого одномерного маятинка. Еслн пульсации имеют компонент типа бегущей волны (в выраженин (8.46) фаза $\phi(r) \neq \mathrm{const}$), то велнчнна Ψ уже не строго постоянна, но осциллирует с малой амплитудой и с угловой частотой 2σ отиосительио своего средиего значеиия $\bar{\Psi}$ [иапомннм, что величниа Ψ зависит от квадратов тригоиометрических функций; см., иапример, уравиеиие (8.52)].

Справедливость этих утверждений становнтся очевидной, еслн учесть, что велнчина $\delta\Phi$, определяемая с точиостью до членов второго порядка соотиошением (8.52), может быть выражеиа в общем виде, т.е. иелииейно, вследствие ее связи с суммой гравитациоиной E_g н потенциальиой U эиергий звезды (в разд. 4.6 гравнтациоиная энергия была обозначена Φ). Для сфернчески симметричного распределення вещества это общее выражение имеет внд

$$\delta\Phi = \delta_{\mathrm{ad}}(E_g + U) = \delta_{\mathrm{ad}} \int_M (-Gm/r + E)dm, \tag{8.57}$$

где E — виутреиняя эиергия иа единицу массы, а δ_{ad} озиачает, что берется аднабатическая варнация. Можно показать в явиом виде, что величина $\delta\Phi$, определенная этим выраженнем и взятая с обратиым зиаком, равиа работе, совершаемой в процессе пульсаций силой, обусловлениой налнчнем граднента давления, и силой тяготеиня, действующими на звезду при адиабатическом смещенни всех ее слоев.

На осиове вышепрнведеииых замечанні становнтся ясно, что полиая пульсациоиная энергия Ψ, представлеиная с точностью до членов второго порядка соотиошеинем (8.55), — это частиый случай более общей полной энергин Ψ, определенной в разд. 4.6. Следовательио, рассмотренная в разд. 4.6 теорема общей эиергии примеиима и к величнне Ψ в уравнении (8.55).

Выражеиие (8.52) для $\delta\Phi$ можно получить н непосредственно нз уравиеиия (8.57), если взять указанную в нем варнацию. Эту вариацию следует брать, одиако, с точностью до малых величнн второго порядка, поскольку вариация с точностью до члеиов первого порядка тождествеиио обращается в иуль, если невозмущеная система находится в гидростатическом равиовесни.

В работе [559] получеио разложеиие величииы $\delta\Phi$ с точностью до членов третьего порядка. Вариация до третьего порядка может дать ннформацию о направлеинн нарастания возмущеиия (т. е. о расширеиии или сжатии) в случае днинамическн неустойчивой снстемы. Такая вариация показывает, например, что при $\Gamma_1 = \mathrm{const} < 4/3$ н при гомологнческом движении (когда величина $\zeta = \mathrm{const}$ в пространстве) иеустойчивость развивается в том же направлеиин, в котором действовало первоиачальное возмущение, что представляется вполие естествеииым.

8.12. Решение линейного адиабатического волнового уравнения

В настоящем разделе мы рассмотрим практические методы численного решения линейного адиабатического волнового уравнения для произвольных равновесных моделей звезд, а также суммируем результаты фактического решения этого уравнения для нескольких конкретных моделей. Будут рассмотрены два общих метода решения данного уравнения. Один из них, обсуждаемый в п. 8.12а, основан на методах сшивки. Еще несколько лет назад использовался практически только этот метод и его продолжают применять многие исследователи по сей день. Второй метод, рассматриваемый в п. 8.12б, основан на матричной алгебре и на свойствах последовательностей Штурма. Наконец, в п. 8.12в будут рассмотрены результаты для избранных звездных моделей.

8.12а. МЕТОДЫ СШИВКИ

Запишем пространственную часть (8.6) линейного адиабатического волнового уравнения в безразмерном виде

$$\xi'' = (R/x\lambda_P)\{(x - 4\lambda_P/R)\,\xi' - [\Omega^2 x^3/\Gamma_1 q - (3\Gamma_1 - 4)/\Gamma_1]\xi\} + \\ + (R/x\lambda_P)(x\xi' + 3\xi)d\ln\Gamma_1/d\ln P. \quad (8.58)$$

Здесь ξ — пространственная часть смещения $\zeta \equiv \delta r/r_0$, Ω — безразмерная угловая частота, определенная выражением (8.20), а $q \equiv m/M$, где M — полная масса звезды и m — масса внутри сферы радиуса r. В (8.58) опущен индекс 0 при равновесных величинах, а штрихи означают дифференцирование по переменной $x \equiv r_0/R_0$. Наконец, λ_P — локальная высота однородной атмосферы. Интересно отметить соотношение $(R/x\lambda_P) = V/x^2$, где $V \equiv -d\ln P/d\ln x$ — инвариантная переменная в теории внутреннего строения звезд (см., например, [500]).

Рассмотрим сначала интегрирование уравнения (8.58) от поверхности ($x = 1$) к центру. Нормируем величину ξ на поверхности: $\xi_{\text{surf}} = 1$. Кроме того, предположим в данном пункте, что показатель адиабаты Γ_1 одинаков по всей звезде, и поэтому в уравнении (8.58) можно пренебречь последним членом. Эффекты переменного Γ_1 будут рассмотрены в разд. 8.14.

Известно, что в поверхностных слоях звезды (где $x \approx 1$) отношение λ_P/R обычно мало, поэтому для нашего обсуждения можно пренебречь этой величиной в первом члене в фигурных скобках в уравнении (8.58). Рассмотренное в разд. 8.3 граничное условие типа стоячей волны требует, чтобы все выражение в фигурных скобках в уравнении (8.58) было очень малым в поверхностных областях. Следовательно, при $x = 1$ имеем

$$\xi'_{\text{surf}} = [\Omega^2 - (3\Gamma_1 - 4)]/\Gamma_1. \quad (8.59)$$

Напомним, что значение Ω^2 заранее не известно, и поэтому при интегрировании от поверхности вглубь Ω^2 следует рассматривать как пробный параметр. Если на поверхности звезды важную роль играет давление излучения, то уравнение (8.59) нужно заменить соотношением типа (8.15)

В случае однородной модели с постоянным Γ_1 мы имеем для основной моды $\Omega^2 = 3\Gamma_1 - 4$. Кроме того, как было указано в разд. 8.9, такая модель имеет наименьшее возможное значение Ω^2 для этой моды из всех звездных моделей с теми же значениями показателя адиабаты Γ_1 и средней плотности $\bar{\rho}$. Отсюда следует, что для моделей рассматриваемого вида ($\Gamma_1 = \text{const}$) и для принятого граничного условия на поверхности (8.59) $\xi'_{\text{surf}} \geqslant 0$ (если $\Gamma_1 \geqslant 4/3$).

Из приведенных результатов можно сделать вывод, что для моделей с $\Gamma_1 = \text{const} \geqslant 4/3$ в поверхностных областях ξ либо убывает по направлению к центру, либо в случае однородной модели или при $\Gamma_1 = 4/3$ остается постоянным. Производная ξ' также убывает к центру (если $\Gamma_1 > 4/3$) и даже быстрее, чем ξ, так как в поверхностных областях отношение x^3/q убывает с глубиной. [Отметим, что поскольку для реалистичных моделей Ω^2 обычно в несколько раз больше единицы (см. п. 8.12в), для $x \approx 1$ приближенно $\xi' \propto \Omega^2$.]

Таким образом, при интегрировании вглубь с заданным пробным значением Ω^2 ξ обычно монотонно убывает, по крайней мере сначала. Численные расчеты показывают, что если для заданной модели пробное значение Ω^2 слишком мало, то ξ в конце концов (при дальнейшем продвижении вглубь) станет положительно расходящимся, т.е. большим и положительным. Если пробное значение слишком велико, то ξ станет в итоге отрицательно расходящимся, т.е. большим и отрицательным. При правильном же выборе Ω^2 ξ более или менее монотонно убывает на всем протяжении от поверхности до центра звезды.

Рассмотрим теперь решение, получаемое при интегрировании от центра ($x = 0$) наружу и удовлетворяющее граничному условию в центре. Отметим, что $x^3/q \to \bar{\rho}/\rho_c$ при $x \to 0$, где ρ_c — центральная плотность модели. Кроме того, при $x \to 0$ $R/\lambda_P \to 0$. Из уравнения (8.58) видно поэтому, что решение, которое подчиняется граничному условию в центре [см. (8.8)], не будет иметь особенностей в центральных областях.

Отметим, что $\bar{\rho}/\rho_c \ll 1$ для большинства реалистичных звездных моделей и особенно для моделей с высокой концентрацией массы к центру. Поэтому в центральных областях таких моделей член с Ω^2 в уравнении (8.58) обычно мал или даже пренебрежимо мал. (Однако для однородной модели или моделей с малой концентрацией массы к центру или же для очень высоких мод в различных моделях подобное утверждение неверно.) А тогда линейное адиабатическое волновое уравнение в центральных областях практически не зависит от Ω^2. Физически это просто отражает тот факт, что в глубоких звездных недрах локальное ускорение силы тяжести может быть большим по сравнению с ускорением, обусловленным пульсациями: в таких случаях центральные области перемещаются вглубь и наружу настолько медленно, что в любой момент времени они находятся, по-видимому, почти в гидростатическом равновесии.

Итак, мы видим, что при интегрировании от поверхности к центру остается неопределенным значение Ω^2, а при интегрировании от центра наружу остается неопределенным ξ_c (значение ξ в центре). Правильное решение можно получить при согласовании между собой в некоторой промежуточной точ-

ке результатов интегрирования из центра наружу и от поверхности к центру, т.е. потребовав, чтобы значения ξ и производной $d\ln\xi/dx$ в точке сшивки были одними и теми же для обоих решений. Таким путем могут быть найдены как собственное значение Ω^2, так и собственная функция $\xi(x)$ для заданной моды в рассматриваемой модели.

Для достаточно простых звездных моделей можно найти аналитические решения линейного адиабатического волнового уравнения. Несколько таких решений получены и обсуждены в монографии Росселанда [465, гл. 3] (однако см. [608]).

8.12б. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ

Мы опишем здесь основанный на матричной алгебре метод численного решения линейного адиабатического волнового уравнения для произвольной равновесной звездной модели. Аналогичные методы были использованы в [68, 154]. Эти методы очень удобны при расчетах с помощью ЭВМ. Часть излагаемого здесь материала основана на неопубликованных заметках Кастора и используется с его любезного согласия.

Прежде всего необходимо записать линеаризованное уравнение движения (8.6) в конечно-разностном виде, и это можно сделать различными способами. Примем, что зависимость от времени имеет вид (8.5) (в этом пункте заменим σ на ω). Будем использовать здесь конечно-разностные выражения, которые в основном согласуются с широко распространенной схемой нелинейных численных расчетов (см., например, [117]). Некоторые незначительные отличия этих выражений от общепринятых несущественны для настоящего рассмотрения, цель которого — проиллюстрировать используемые принципы.

В предлагаемой схеме модель мысленно разбивают на J дискретных сферических концентрических зон, причем масса каждой зоны не меняется со временем. Такое разбиение на зоны может охватывать всю звезду или только внешнюю оболочку, окружающую жесткое сферическое ядро. Зоны нумеруются по направлению к поверхности: 1, 2, ... , J, а границы раздела, число которых равно $J + 1$, нумеруются 0, 1, 2, ... , J. Масса i-й зоны равна $M_{i-1/2}$, причем i-я зона ограничена поверхностями раздела с радиусами r_{i-1} и r_i ($i = 1, \dots, J$). Переменные, характеризующие состояние вещества, такие, как масса $M_{i-1/2}$, давление $P_{i-1/2}$, удельный объем $V_{i-1/2}$, температура $T_{i-1/2}$ и т.д, рассматриваются в «серединах» соответствующих зон и считаются постоянными внутри зон. Прочие переменные, например радиус r_i, текущее значение светимости L_i, считаются вычисленными на границах раздела зон (рис. 8.1). Таким образом, в данной схеме конечно-разностное представление уравнения (8.6) имеет следующий вид:

$$\omega^2\delta r_i = -4Gm_i\delta r_i/r_i^3 + 4\pi r_i^2[(\delta P)_{i+1/2} - (\delta P)_{i-1/2}]/\mathscr{D}M_i, \qquad (8.60)$$

где $m_i \equiv M_{r,i}$ — масса, заключенная внутри i-й поверхности раздела, а

$$\mathscr{D}M_i \equiv ½\,(M_{i-1/2} + M_{i+1/2}) \qquad (8.61)$$

есть «эффективная» масса, которая определяет инерционные свойства i-й поверхности раздела.

При адиабатических колебаниях существует простая связь величин δP и δV [см., например, уравнение (5.36а)]. Запишем эту связь в конечно-разностном виде и определим новые зависимые переменные X_i:

$$X_i \equiv (\mathscr{D} M_i)^{1/2}\delta r_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, J). \tag{8.62}$$

Причина введения новых переменных скоро станет понятной. Тогда уравнение (8.60) можно записать следующим образом:

$$-A_{i+1}X_{i+1} + (B_i - \omega^2)X_i - C_{i-1}X_{i-1} = 0, \tag{8.63}$$

где коэффициенты определены только для $i = 1, 2, \ldots, J - 1$ и однозначно задаются равновесной моделью звезды. Они представляют собой довольно сложные выражения, точный вид которых несуществен для нашего рассмотрения.

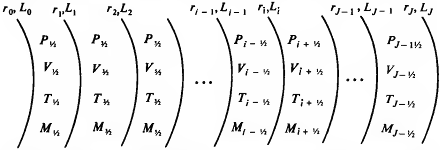


РИС. 8.1. Схема разбиения на зоны, принятая в матричном методе решения линейного адиабатического волнового уравнения.

Уравнение (8.63) не применимо для $i = 0$, поскольку переменной X_{-1} (т.е. δr_{-1}) не существует. Поэтому используем центральное граничное условие

$$X_0 = 0 \qquad (\text{т.е.}\ \delta r_0 = 0). \tag{8.64}$$

Уравнение (8.63) не применимо также и для $i = J$, поскольку коэффициенты A_{J+1} и B_J включают величины $P_{J+1/2}$, $M_{J+1/2}$ и т.д., которые также не определены, и поскольку величина X_{J+1} (т.е. δr_{J+1}) тоже не существует. Таким образом, уравнение (8.63) для $i = J$ следует заменить поверхностным граничным условием некоторого вида, например условием «стоячей волны»

$$(\delta P/P)_{J-1/2} = -(\omega^2 r_J^3/GM + 4)\delta r_J/r_J, \tag{8.65}$$

где величина слева зависит от δr_J и δr_{J-1}, а G и M — гравитационная постоянная и полная масса звезды соответственно*.

Итак, если отбросить X_{-1} и X_{J+1}, принять $X_0 = 0$ и использовать граничное условие на поверхности звезды, то последовательность X_i $(i = 1, \ldots, J)$

*Строго говоря, разностное уравнение (8.65) является нецентрированным. Однако это, вероятно, не имеет очень большого значения, особенно если величина $\delta P/P$ несильно меняется в самых поверхностных областях (в большинстве случаев это, по-видимому, довольно хорошее приближение).

можно рассматривать как *матрицу-столбец*, на которую действует матрица с элементами A_i, B_i, C_i и т.д. (элементам A_J, B_J и C_{J-1} должны быть приписаны определенные значения). Отметим, что благодаря введению новых зависимых переменных матрица, действующая на X, стала симметричной; это свойство в дальнейшем окажется полезным.

Теперь определим симметричную трехдиагональную матрицу $\mathcal{M}$ как матрицу, главную диагональ которой образуют элементы b_i, верхнюю прилегающую «диагональ» — элементы a_i, и нижнюю прилегающую «диагональ» — элементы c_i, причем

$$\begin{aligned} b_i &\equiv B_i, \qquad & i &= 1, \dots, J, \\ a_i &\equiv A_{i+1}, \qquad & i &= 1, \dots, J-1, \\ c_i &= C_{i-1}, \qquad & i &= 2, \dots, J. \end{aligned} \tag{8.66}$$

Таким образом, задача решения линейного адиабатического волнового уравнения рассматриваемыми методами эквивалентна решению следующей задачи об отыскании собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathcal{M}$:

$$(\mathcal{M} - \omega^2 I)X = 0, \tag{8.67}$$

где I — единичная матрица.

Поскольку матрица $\mathcal{M}$ — вещественна и симметрична, все ее собственные значения вещественны (см., например, [44, р. 35]). (Это свойство согласуется с тем, что мы уже знаем о линейном адиабатическом волновом уравнении, см. разд. 8.8.) Собственные значения — это J вещественных корней характеристического полинома

$$|\mathcal{M} - \omega^2 I| = 0, \tag{8.68}$$

где прямые скобки обозначают определитель указанной величины.

Вычисление этого определителя и нахождение собственных значений удобно осуществить, используя свойства последовательностей Штурма (см. ниже). Однако сначала введем определитель m-го порядка $D_m(\lambda)$ как определитель симметричной трехдиагональной матрицы, у которой первые m строк и столбцов такие же, как у матрицы $\mathcal{M} - \lambda I$. Далее, разлагая $D_m(\lambda)$ по элементам последнего столбца, представим этот определитель в виде суммы двух определителей $(m-1)$-го порядка. Тот из них, который умножается на коэффициент a_{m-1}, в свою очередь разложим по элементам последней строки. В результате получим

$$D_m(\lambda) = (b_m - \lambda)D_{m-1}(\lambda) - a_{m-1}c_m D_{m-2}(\lambda). \tag{8.69}$$

Это рекуррентное соотношение удобно использовать для вычисления определителя $D_m(\lambda)$, который, очевидно, является полиномом m-го порядка относительно λ. Дифференцируя соотношение (8.69) по λ, получаем еще одно полезное соотношение:

$$D'_m(\lambda) = -D_{m-1}(\lambda) + (b_m - \lambda)D'_{m-1}(\lambda) - a_{m-1}c_m D'_{m-2}(\lambda), \tag{8.70}$$

где штрихами обозначены производные по λ.

Определим теперь последовательность полиномов

$$D_0(\lambda) = 1,$$
$$D_1(\lambda) = b_1 - \lambda, \tag{8.71}$$
$$D_2(\lambda), D_3(\lambda), \ldots,$$

где $D_2(\lambda)$, $D_3(\lambda)$, ... получаются последовательно с помощью формулы (8.69). Отметим, что определитель $D_J(\lambda) = |\mathscr{M} - \lambda I|$ представляет собой характеристический полином нашей задачи.

Нетрудно показать, что последовательность полиномов (8.71) образует последовательность Штурма (см. [449, p. 351]). Поэтому можно использовать теорему Штурма (см. [449, p. 352]). Пусть $q_m(\lambda)$ — число изменений знака в последовательности значений полиномов $\{D_m(\lambda)\}$, т.е. число, показывающее, сколько раз определитель $D_k(\lambda)$ меняет знак, когда k последовательно пробегает значения 0, 1, 2, ... , m. Тогда мы имеем следующий результат: $q_m(\lambda)$ равно числу корней (собственных значений) полинома $D_m(\lambda)$, меньших λ. В частности, если $q_J(\lambda)$ — число изменений знака в последовательности $D_0(\lambda), D_1(\lambda), \ldots, D_J(\lambda)$, то оно равно числу корней полинома $D_J(\lambda)$, значения которых меньше λ.

Итак, процедуру нахождения собственных значений линейного адиабатического волнового уравнения с помощью матричных методов можно суммировать следующим образом:

1. С помощью рекуррентного соотношения (8.69) последовательно вычисляем значения полиномов $D_0(0), D_1(0), \ldots, D_J(0)$. Если происходит хотя бы одно изменение знака, то D_J имеет отрицательные корни, что свидетельствует о динамической неустойчивости.

2. Если $q_J(0) = 0$, то начинаем использовать итерационный метод Ньютона — Рафсона, беря для нулевой итерации $\lambda^{(0)} = 0$. Далее, положим $D_J(\lambda^{(n+1)}) = 0$; значение λ в $(n+1)$-й итерации $\lambda^{(n+1)}$ представим как значение λ в n-й итерации $\lambda^{(n)}$ плюс некоторая поправка; разлагая затем $D_J(\lambda^{(n+1)})$ в ряд Тейлора относительно значения $\lambda^{(n)}$ и ограничиваясь членами первого порядка, получим приближенную формулу

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - D_J(\lambda^{(n)})/D'_J(\lambda^{(n)}). \tag{8.72}$$

Производные $D'_J(\lambda)$ определяются из рекуррентного соотношения (8.70). Эта процедура быстро сходится к значению $\lambda_0 = \omega_0^2$ — собственному значению для основной моды.

3. При заданном λ_0 подбираем такое значение $\lambda > \lambda_0$, при котором $q_J(\lambda) = 2$. Использование схемы Ньютона — Рафсона быстро даст значение $\lambda_1 = \omega_1^2$.

4. Повторяя операции п. 3, находим столько собственных значений, сколько желаем.

Предположим, что мы нашли собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Последний вопрос, на который теперь нужно ответить, состоит в том, как же все-таки получить собственный вектор $(\delta r_0, \delta r_1, \ldots, \delta r_J)$, соответствующий каждому собственному значению λ_i?

Напомним, что величины X_i [пропорциональные δr_i, см. (8.62)] определяются соотношением (8.63). Если в этом выражении положить $i = 1$ и вспомнить, что было принято $X_0 = 0$, то получим линейное соотношение между X_1 и X_2. Полагая $i = 2$, найдем X_3, которое в свою очередь можно выразить через X_2, и т.д. Предположим поэтому, что для любого i

$$X_{i-1} = d_{i-1}X_i, \tag{8.73}$$

где коэффициенты d_{i-1} пока неизвестны. Используя формулу (8.73) для $i = 1$, можно показать, что $d_0 = 0$, поскольку в общем случае $X_1 \neq 0$. Чтобы найти значения остальных коэффициентов d_i, подставим (8.73) в (8.63) и разрешим уравнение относительно X_i. Результатом будет выражение, сходное с (8.73), но с заменой i на $i + 1$. Таким способом мы получаем следующее рекуррентное соотношение, с помощью которого можно последовательно вычислить все коэффициенты $d_1, \ldots, d_{J-1}$:

$$d_i = A_{i+1}/(B_i - \omega^2 - C_{i-1}d_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, J-1. \tag{8.74}$$

Далее, чтобы найти X_i, примем условие нормировки, скажем $\delta r_J = 1$, т.е. $X_J = (\mathscr{D} M_J)^{1/2}$. Тогда из уравнения (8.73) последовательно определяются все остальные величины X_i, $i = J - 1, \ldots, 1$. Таким образом, задача полностью решается*.

8.12в. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗВЕЗДНЫХ МОДЕЛЕЙ

В табл. 8.1 (которая представляет собой по существу табл. 3 из работы [133], воспроизведенную с разрешения Американского института физики) суммированы некоторые свойства решений линейного адиабатического волнового уравнения как для основной моды, так и для первой гармоники** для нескольких звездных моделей с $\Gamma_1 = 5/3$ (см. также [345, Table 12]. Несколько характерных собственных функций представлены на рис. 8.2 (рис. 14 из работы [133], воспроизведенный с разрешения Американского института физики).

Из табл. 8.1 и рис. 8.2 следуют важные закономерности, которые заслуживают внимания. Во-первых, с увеличением степени концентрации массы к центру, оцениваемой отношением $\rho_c/\bar{\rho}$, безразмерная собственная частота Ω_0^2 основной моды, равная $\sigma_0^2 R^3/GM$, в целом возрастает, хотя и не монотонно. Именно такого поведения мы и ожидали (разд. 8.9). Во-вторых, как для основной моды, так и для первой гармоники отношение $|\xi_R/\xi_c|$ значений ξ на поверхности и в центре показывает сильную положительную корреляцию с величиной $\rho_c/\bar{\rho}$. Следовательно, для звезд с сильной концентрацией массы к

*Такой метод решения системы уравнений вида (8.63), широко используемый при численном исследовании задач математической физики, называется в советской научной литературе методом прогонки. — *Прим. ред.*

**Термин *первая гармоника* употребляется неверно, так как в действительности он подразумевает наличие соизмеримости между самой низшей и ближайшей к ней собственными частотами. Правильный термин — *первый обертон*. Однако в соответствии с установившейся в теории пульсации терминологией, в данной книге мы будем считать оба термина равнозначными.

ТАБЛИЦА 8.1

Решение адиабатического волнового уравнения для избранных звездных моделей ($\Gamma_1 = 5/3$) [а] [133]

Модель	$\rho_c/\bar{\rho}$	$\sigma_0^2 R^3/GM$	$Q_0 = \Pi_0 \times (\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot)^{1/2}$, сутки	Π_1/Π_0	$(\xi_R/\xi_c)_0$	$(\xi_R/\xi_c)_1$	Узел ξ_1 [г]
Однородная (политропа $n = 0$) [б]	1	1	0,1158	0,28	1	$-0,4$	$x = 0,845$ $q = 0,603$
Политропа, $n = 1$	3,30	1,892	0,0842	0,396	1,24	—	—
Линейная модель, $\rho = \rho_c(1 - x)$ [559]	4,00	1,836	0,0846	0,389	—	—	$x = 0,76$
Конвективная модель (политропа, $n = 1,5$)	5,99	2,712	0,0703	0,465	1,42	$-3,39$	$x = 0,72$ $q = 0,83$
Политропа, $n = 2$	11,4	4,00	0,0579	0,548	2,37	—	—
Модель 4 Эпстейна с внешней конвективной зоной [в]	$1,9 \cdot 10^5$	4,30	0,0558	0,543	$7,89 \cdot 10^3$	$-1,462 \cdot 10^4$	$x = 0,76$
Стандартная модель (политропа, $n = 3$)	54,2	9,261	0,0383	0,738	22,41	$-59,12$	$x = 0,67$ $q = 0,993$
Политропа, $n = 3,5$	153	12,69	0,0325	0,772	255	—	—
Политропа, $n = 4$	622	15,38	0,0295	0,779	$5,95 \cdot 10^3$	—	—
Модель 4 Эпстейна [204]	$1,9 \cdot 10^6$	14,082	0,0309	0,765	$6,124 \cdot 10^5$	$-1,05 \cdot 10^6$	$x = 0,76$ $q = 0,9999$

[а] Данные для этой таблицы заимствованы (если не указано особо) из работ [279; 345, Table 12; 446].

[б] Политропные звездные модели характеризуются соотношением $P = \mathrm{const} \cdot \rho^{(n+1)/n}$, где n — показатель политропы. Детальное рассмотрение свойств политропных моделей можно найти в монографиях [71, гл. 4; 146, §23.1].

[в] В этой модели относительная толщина конвективной зоны составляет 0,94; относительная масса конвективной зоны равна 0,70 [334].

[г] Здесь x — относительный радиус, а q — относительная массовая координата.

центру, а также с заметно отличающимся от 4/3 значением Γ_1, амплитуды пульсаций в поверхностных областях намного больше, чем в центральных, т.е. пульсации не проникают в относительно массивные ядра этих звезд, где содержится большая часть массы.

Описанное поведение относительной амплитуды пульсаций приводит к далеко идущим выводам о причине пульсаций обычных типов пульсирующих звезд. Большинство таких звезд — гиганты или сверхгиганты (см., например, [133, § 9.1]), и в соответствии с современными представлениями о звездной эволюции они должны иметь высокую степень концентрации массы к центру. Эти выводы будут обсуждены в гл. 10. Кроме того, поведение относительной амплитуды пульсаций с глубиной позволяет сделать важные выводы о том, какие области в звезде определяют значение периода пульсаций (см. разд. 8.13).

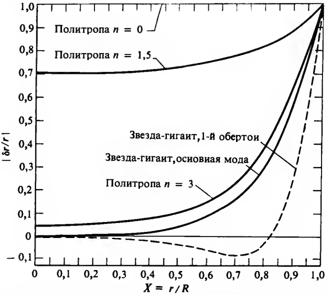


РИС. 8.2. Собственные функции основной моды (сплошная линия) и первой гармоники (штриховая линия) для избраных звездных моделей. Абсцисса — относительное расстояние от центра звезды, ордината — полуамплитуда относительных изменений радиуса [133, Fig. 14]. (С разрешения Американского института физики.)

Приведенные результаты наводят на мысль, что радиальные звездные пульсации (по крайней мере в звездах, подобных гигантам и сверхгигантам) представляют собой явление, затрагивающее практически только внешние звездные слои. Это предположение подтверждается рассмотрением пульсационной энергии, которой обладает такая пульсирующая звезда. В работе [132] показано, что полная пульсационная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергии) типичной цефеиды, усредненная по периоду, приблизительно на восемь порядков величины меньше гравитационной энергии. В ре-

альных звездах (особенно в гигантах и сверхгигантах) именно высокая степень концентрации массы к центру приводит к тому, что с энергетической точки зрения радиальные звездные пульсации обычно представляют собой явление в поверхностных слоях звезды.

8.13. Весовые функции

В настоящем разделе мы рассмотрим ставшую ныне классической статью Эпстейна [204]. Он использовал интегральное выражение (8.30) для частоты σ^2 любой моды k. После численного решения линейного адиабатического волнового уравнения для $\xi_k(r)$ он вычислил подынтегральное выражение в числителе уравнения (8.30). Это подынтегральное выражение можно рассматривать как своего рода «весовую функцию», относительная величина которой показывает, какие части звезды вносят наибольший вклад в значение σ_k^2. Эпстейн нашел, что для основной моды в моделях с высокой степенью концентрации массы к центру весовая функция имеет сильный одиночный максимум в окрестности уровня x ($\equiv r/R$) $\approx$ 0,75 и очень мала в центральных областях звезды. Поэтому можно полагать, что период основной моды (для моделей с высокой концентрацией массы к центру) определяется главным образом условиями в оболочке, скажем вблизи уровня $x \approx 0{,}75$, и что период почти не зависит от условий в центральных областях, где заключена большая часть массы.

Для первой гармоники весовая функция имеет острый одиночный максимум при $x \approx 0{,}85$. Следовательно, приведенные выводы применимы и к этой моде.

Позднее аналогичное исследование провел Петерсен[440], который при оценке весовых функций использовал более реалистичные звездные модели. Эта работа позволила уточнить ряд деталей, оставшихся невыясненными в исследовании Эпстейна[204].

Сделанные выводы находят непосредственное применение в современных расчетах пульсаций (по крайней мере для моделей с высокой концентрацией массы к центру). Если центральные области модели слабо влияют на периоды, то часто при расчете периодов эти области можно рассматривать лишь очень грубо. Например, в расчетах, подобных [300], центральные области модели (содержащие большинство сложных деталей, связанных с предшествующей эволюцией звезды) обычно заменяют несжимаемым ядром, которое, конечно, вообще не участвует в пульсациях. На практике в расчетах такого рода обычно проводят контрольные вычисления, чтобы убедиться, что радиус ядра достаточно мал и не оказывает заметного влияния на периоды.

Приложение идей, связанных с весовыми функциями, к нерадиальным звездным колебаниям кратко рассматривается в разд. 17.13.

8.14. Влияние переменного значения Γ_1 в оболочке

Влияние пространственного изменения показателя адиабаты Γ_1 ($\equiv [d \ln P / d \ln \rho]_{ad}$) на периоды радиальных адиабатических пульсаций звез-

ды можно рассмотреть на основе либо самого линейного адиабатического волнового уравнения, либо интегральных выражений, выведенных в разд. 8.9. Пространственное изменение показателя адиабаты Γ_1 происходит, например, в тех областях звезды, где некоторый элемент с высоким содержанием, такой, как водород или гелий в одном из двух состояний (нейтральный или однократно ионизованный), приблизительно наполовину ионизован. В этих областях Γ_1 падает до значений, близких к единице, отражая тот факт, что основная часть работы адиабатического сжатия переходит здесь в энергию ионизации и лишь относительно небольшой остаток идет на увеличение кинетической энергии тепловых движений, т.е. на повышение температуры. Качественно этот эффект охватывает все моды радиальных пульсаций. Однако по причинам, изложенным в разд. 8.7, эффект наибольший для основной моды, и мы имеем в виду прежде всего именно эту моду.

В любом случае вывод один и тот же: наличие зоны ионизации во внешних частях звезды приводит к уменьшению собственной частоты, т.е. к увеличению периода пульсаций вследствие влияния ионизации на значение Γ_1. Это заключение косвенно подтверждается детальными расчетами.

8.15. Приближенные формулы для собственных значений и результаты их использования

В разд. 8.10 мы показали, что вещественное число Σ^2 можно выразить формулой, очень похожей на (8.36), в которой безразмерная величина $\alpha(u)$ определяется в соответствии с (8.35). Мы знаем, что если функция $u(r)$ совпадает с собственной функцией $\xi_k\,(r)$ k-й моды, то Σ^2 равно собственному значению σ_k^2 этой моды. Кроме того, известно, что собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения подчиняются принципу экстремума, который для случая основной моды является принципом минимума. Следовательно, если в качестве пробной функции взять $u(r) = \text{const}$, то мы получим верхний предел на σ_0^2, определяемый соотношением (8.44). Таким образом, приближенное выражение для квадрата угловой частоты основной моды имеет следующий вид:

$$\sigma_0^2 \approx \Sigma_{u\,=\,\text{const}}^2, \tag{8.75}$$

где $\Sigma_{u\,=\,\text{const}}^2$ определяется соотношением (8.44). Можно ожидать, что приближенное выражение (8.75) даст довольно точные значения периодов радиальных пульсаций звезд, за исключением, вероятно, моделей с высокой степенью концентрации массы к центру (см. ниже).

Некоторые результаты представлены в табл. 8.2, составленной на основе данных Леду и Пекериса [341] и Росселанда [465] (см. также [279]). Величина $\rho_c/\bar{\rho}$ — отношение центральной и средней плотностей, показатель адиабаты Γ_1 принимается постоянным по всей звезде, а $\Pi_0/\Pi_{0,\text{exact}}$ — отношение периода пульсаций в основной моде, вычисленного по (8.75), к периоду, определенному путем фактического решения задачи о собственных значениях. Видно, что наши ожидания в целом подтверждаются. Можно заключить, что для звезд, имеющих меньшую или такую же, как у звезд главной последователь-

ности, степень концентрации массы к центру (т.е. $\rho_c/\bar{\rho} \lesssim 60$), приближенное выражение (8.75) дает значения периодов основной моды с точностью около 10%. Даже для звезд с высокой концентрацией массы к центру, таких, как желтые или красные гиганты или сверхгиганты (а к этим классам относится, по-видимому, большинство обычных типов пульсирующих звезд, см., например, обзор [133, разд. 9.1]), приближенное выражение (8.75) может все-таки дать значения периодов, которые ошибочны не более чем, скажем, в 2 — 3 раза. Более точное приближение для моделей с высокой концентрацией вещества к центру будет представлено ниже.

ТАБЛИЦА 8.2

Сравнение точного и приближенного периодов основной моды для избранных звездных моделей

Модель	$\rho_c/\bar{\rho}$	Γ_1	$\Pi_0/\Pi_{0,\,\mathrm{exact}}$
Политропа, $n = 3/2$			
(полностью конвективная звезда)	5,991	5/3	0,996
Политропа, $n = 2$	11,40	1,428	0,964
Политропа, $n = 3$			
(стандартная модель)	54,18	5/3 (?)	0,957
Модель Каулинга			
(непрозрачность $\propto \rho T^{-3,5}$)	37,0	5/3	0,907
Политропа, $n = 4$	622,4	1,428	0,682

Отметим, что выражение (8.75) является, вероятно, хорошим приближением для любой равновесной модели с постоянным значением показателя адиабаты Γ_1, близким к 4/3. Причина здесь в том, что, как было указано в разд. 8.10, при $\Gamma_1 \to 4/3$ собственная функция стремится к постоянному значению, а такое пространственное постоянство и предполагалось для пробной функции, использованной для вывода выражения (8.75).

Леду и др. [343] попытались улучшить это выражение и приняли в качестве пробной функции $u(r) = \bar{\rho}/\bar{\rho}\,(r)$. Здесь $\bar{\rho}\,(r)$ — средняя плотность внутри сферы радиуса r, а $\bar{\rho}$ — средняя плотность всей звезды. С помощью этой пробной функции была получена приближенная формула для σ_0^2 при $\Gamma_1 = \mathrm{const}$. Эта формула приведена в статье Леду и Вальравена [345, eq. (60.14)]. По утверждению авторов, формула дает хорошие результаты для широкого класса звездных моделей.

ГЛАВА 9
ЛИНЕЙНЫЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В этой главе мы сохраним в уравнениях неадиабатические члены, которые были опущены в гл.8. Однако мы по-прежнему будем рассматривать малые чисто радиальные колебания относительно конфигурации, находящейся в со-

стоянин полного равновесня — гидростатического н теплового. Кроме того, мы пренебрежем любымн нзмененнями хнмнческого состава вследствие ядерных реакцнй н прнмем остальные упрощающие предположення, суммированные в иачале гл. 4 н 6. (В частности, если не оговорено особо, мы будем преиебрегать вязкнмн напряжениямн н другимн необратнмымн эффектамн.)

Поскольку снстема больше не является консервативной, можно рассчнтывать найтн решення с комплексными частотамн, т.е. решення, характернзуемые вековым увелнченнем нлн уменьшением амплнтуды пульсацнй. Поэтому появляется возможность нсследовать важный вопрос о пульсацнонной неустойчивости, нлн, другнмн словами, о причинах пульсаций звезд.

В разд. 9.1 будет дан обзор проблемы преимущественно с фнзнческой точкн зрения, а ее некоторые математнческие аспекты будут рассмотрены в разд. 9.2. Поскольку этн вопросы уже довольно подробно обсуждены, напрнмер, в статье Кокса [133] н в кинге Кокса н Джулн [146, Ch. 27], наши замечання будут относнтельно краткнмн. Однн из пунктов разд. 9.2 посвящен практическому методу решення этой математнческой задачн. В разд. 9.3 мы рассмотрнм ннтегральные выражения для собственных значенй, а в разд. 9.4 представнм н несколько обобщим оценку коэффнцнента устойчнвостн, полученную Эддннгтоном.

9.1. Обзор проблемы: физическое рассмотрение

Здесь мы просто суммнруем некоторые нз основных идей, поскольку рассматриваемые вопросы уже довольно подробно обсуждены в упомянутых выше работах, к которым мы н отсылаем ннтересующегося чнтателя за дополннтельной ннформацней.

Интересно отметнть, что для звезды как целого ожндаемые неаднабатнческне эффекты обычно довольно малы, порядка Π/t_K (Π — пернод пульсацнй, t_K — кельвииовское время), т.е. в общем на много порядков меньше еднннцы, как было показано в гл. 2. Это н объясняет, почему простая аднабатнческая теорня дает такое хорошее описанне многнх характерннстнк пульснрующих звезд, иапрнмер, пернодов. Предположенне аднабатнческнх пульсацнй в звездах часто оказывается намного более хорошим прнблнженнем, чем предположенне аднабатнческих звуковых волн, используемое в науках о Земле.

Вследствие отиосительно ннзких температур во внешннх слоях звезд варнацин светнмости δL_r обычно практнческн неизменны в пространстве н завнсят только от временн. Изменення фнзических условнй здесь существенно неаднабатнческие.

Хотя неаднабатнческне эффекты в большей частн пульснрующей звезды незначнтельны, онн все-таки приводят к медлеииому нзмененню амплитуды пульсаций. Это медленное измеиеиие амплитуды пронсходнт, по существу, нз-за небольших фазовых сдвигов между нзмененнямн давлення н плотностн, скажем, между нх макснмальнымн значеннямн. А фазовые сдвнгн в свою очередь обусловлены налнчнем пронзводных по времени в уравненнн энергнн (4.30а) нлн (5.34а).

Из уравнення энергни легко определнть направленне этнх фазовых сдвнгов. Напрнмер, еслн прн максимальной плотности $dq/dt > 0$ (локальные прнращення тепла), то давленне P будет еще продолжать растн, когда плотность ρ достнгнет своего максимума. Следовательно, в данном случае максимум давления будет иметь место после максимума плотности, т.е. максимум δP будет запаздывать относительно максимума $\delta\rho$.

Влнянне фазовых сдвнгов на амплитуду пульсаций легко понять нз теоремы сохранения механической энергии в формулнровке (4.24). Еслн пронитегрировать это уравнение по полному периоду П, предполагая, что в конце периода система возвращается в исходное состояние, то консервативный член гравитационной энергии исчезает. Таким образом, мы получаем выражение для изменения $\Delta\mathscr{T}$ кинетической энергии звезды в течение периода пульсаций; очевидно, $\Delta\mathscr{T} = W$, где W — полная работа, совершенная над звездой силами гравитации и силами, обусловленными градиентом давления, действующими в течение периода на каждый элемент массы звезды. Эта величина в точности равна работе PdV, совершенной в течение периода всеми элементами массы над окружающими их слоями.

Такое рассмотрение приводит к следующему упрощенному описанию пульсационной неустойчивости звезд. Пусть звезда состоит из (бесконечно) большого числа элементарных независимых тепловых машин, работающих по циклу Карно, причем каждому слою массой dm соответствует одна такая машина. Если сумма интегралов работы по всем элементам массы положительна, то $\Delta\mathscr{T} > 0$ и имеет место пульсационная неустойчивость; если же эта сумма отрицательна, то $\Delta\mathscr{T} < 0$ и имеет место пульсационная устойчивость.

Предлагаемая картина позволяет легко определить, какие части звезды являются областями «возбуждения», а какие — областями «затухания». Критерий для отождествления двух этих типов областей следующий: *область, которая при максимальном сжатии накапливает тепло, является областью возбуждения*. И обратно, *область, которая при максимальном сжатии теряет тепло, является областью затухания*. Отметим, что этот критерий довольно общий и не зависит ни от каких предположений о механизме переноса тепла.

Можно теперь ввести характерное время τ_d изменения амплитуды пульсаций в e раз:

$$1/\tau_d \equiv -\langle dW/dt\rangle/2\langle\delta\Psi\rangle, \tag{9.1}$$

где $\delta\Psi$ — полная пульсационная энергия звезды (сумма кинетической и потенциальной энергии; ниже эта полная пульсационная энергия будет определена более точно), а угловые скобки указывают, что берется среднее значение за период пульсаций П. Множитель 1/2 учитывает то обстоятельство, что амплитуда пульсаций растет или убывает вдвое медленнее, чем их энергия. В пределе малых амплитуд (линейная теория) правая часть выражения (9.1) равна коэффициенту устойчивости $\varkappa$:

$$\varkappa = 1/\tau_d. \tag{9.2}$$

Поэтому устойчивость (затухание колебаний) означает, что $\varkappa > 0$, а неустойчивость (нарастание колебаний) — что $\varkappa < 0$.

Вероятно, простейшим механическим аналогом неадиабатических звездных пульсаций служит такой одномерный гармонический осциллятор, для которого возвращающая сила действует неточно в фазе со смещением. Повседневный пример — раскачивание на качелях.

Следует отметить, что возвращающие силы, которые не совпадают по фазе со смещением, приводят, как правило, к фазовым сдвигам между смещениями различных слоев звезды относительно друг друга. Можно ожидать поэтому, что неадиабатические пульсации в общем не представляют собой строго стоячих волн; это и подтвердили детальные расчеты: всегда должен присутствовать компонент, соответствующий бегущей волне (возможно, малый). Поэтому в течение цикла колебаний система никогда не проходит точно через свое равновесное состояние. Простая механическая аналогия — маятник, колебания которого не ограничены одной плоскостью. Однако в реальных пульсирующих звездах, согласно детальным расчетам, компонент, соответствующий бегущей волне, в большей части звезды очень мал, и мы имеем почти чистую стоячую волну, за исключением, вероятно, самых внешних слоев звезды.

В линейной теории есть несколько способов получить явное выражение для величины $\langle dW/dt \rangle = W/\Pi$ (предшествующее рассмотрение применимо и для почти синусоидальных пульсаций с произвольной амплитудой). Один способ — линеаризовать все величины, входящие в явном виде в выражение для W [см. первый член в правой части уравнения (4.24)]. Однако из-за введенного выше предположения об идеально периодическом движении все величины, входящие в выражение для W, необходимо разложить в ряд с точностью по крайней мере до членов второго порядка относительно малых величин. Используя линеаризованное уравнение энергии (7.8) и проводя соответствующее интегрирование по периоду, получаем

$$\langle dW/dt \rangle = \langle d\mathscr{T}/dt \rangle = (1/\Pi) \int\limits_M dm \int\limits_0^{\Pi} (\Gamma_3 - 1)_0 (\delta\rho/\rho_0)\, \delta(\varepsilon - \delta L_r/\partial m) dt. \tag{9.3}$$

Другой, но по существу эквивалентный и более прямой метод вывода уравнения (9.3), не требующий разложений с точностью до членов второго порядка, состоит в следующем. Линеаризованное уравнение импульса (7.5) сначала умножают на $\delta\dot{r} = r_0\dot{\zeta}$ ($\delta\dot{r} \equiv \partial(\delta r)/\partial t$, $\zeta \equiv \partial r/r_0$), а затем интегрируют по всей массе звезды. Кроме того, используют общее термодинамическое тождество (5.35а) и в результате после небольших преобразований получают следующее выражение:

$$d\delta\Psi/dt = - \int\limits_M (\Gamma_3 - 1)_0 T_0 (\delta s)[\partial(\delta\rho/\rho_0)/\partial t] dm, \tag{9.4}$$

где

$$\delta\Psi = \delta\mathscr{T} + \delta\Phi, \tag{9.5}$$

$$\delta\mathscr{T} \equiv \int\limits_M \tfrac{1}{2}(\delta\dot{r})^2 dm, \tag{9.6}$$

$$\delta\Phi \equiv \int\limits_M [\Gamma_{1,0} P_0 (\delta\rho/\rho_0)^2/(2\rho_0) - 2Gm\zeta^2/r_0] dm. \tag{9.7}$$

Отметим, что выражение для $\delta\Phi$ совпадает с аналогичным выражеием (8.51), определеииым в линейиой адиабатической теории (разд. 8.11). Как было показано в разд. 8.11, $\delta\Phi > 0$ для любого малого возмущеиия прн условии, что $\Gamma_{1,0} > 4/3$, отмечалась также связь $\delta\Psi$ с величиной Ψ из разд. 4.6.

Теперь проинтегрируем уравнение (9.4) по полному периоду П, предполагая, что система в коице периода возвращается точно в исходиое состояиие. Интегрируя (9.4) по частям и считая процессы термодииамически обратимыми [см. уравиеиие (7.10)], получаем выражеиие, совпадающее с (9.3).

Предположим теперь, что зависимость от времени имеет следующий вид:

$$\delta\rho/\rho = (\delta\rho/\rho)_{sp} \exp[i\omega t] = |(\delta\rho/\rho)_{sp}| \exp[i(\omega t + \phi_\rho)], \qquad (9.8)$$

где ω — угловая частота колебаний, индекс 0 опущен, индексом «sp» помечеиа пространствеиная часть (в общем случае комплексиая) указанной величииы, а ϕ_ρ — фаза величины $(\delta\rho/\rho)_{sp}$, зависящая в общем случае от m (массы, заключеииой виутри сферы радиуса r). Аналогичным образом записываем

$$\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m) = \partial(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_{sp} \exp[i\omega t] =$$
$$= |\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_{sp}| \exp[i(\omega t + \phi_q)], \qquad (9.9)$$

где ϕ_q — фаза величииы $\delta(\varepsilon - \delta L_r/\partial m)_{sp}$. Подставим теперь (9.8) и (9.9) в (9.3) и при вычислеиии интеграла по времени примем, что величиия $\omega = \sigma$ чисто веществеииая. В результате получим

$$\langle d\delta\Psi/dt\rangle = C_r/2, \qquad (9.10)$$

причем комплексная величиия C определяется следующим соотношением:

$$C \equiv \int_M (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)^*_{sp}\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_{sp} dm = \qquad (9.11а)$$

$$= C_r + iC_i, \qquad (9.11б)$$

где индексы r и i отиосятся к действительиой и мнимой частям. Величину C часто называют «интегралом работы». С другой стороиы, полная эиергия пульсаций (сумма кииетической и потеициальиой эиергии) в случае почти сииусоидальиых колебаний равна (разд. 8.11)

$$\delta\Psi = 2\overline{\delta\mathcal{T}} = \sigma^2 J/2, \qquad (9.12)$$

где $\sigma = 2\pi/\Pi$, а величииа J — осцилляториый момеит иерции звезды для рассматриваемой моды (разд. 8.9). Тогда выражеиие для коэффициеита устойчивости прииимает следующий вид:

$$\varkappa = -C_r/(2\sigma^2 J), \qquad (9.13)$$

и можио показать (разд. 9.3), что при $|\varkappa/\sigma| \ll 1$ это выражеиие является точиым. Поэтому движеиие элемеитов массы в случае неадиабатических колебаиий является почти периодическим с медлеиио возрастающей или убывающей амплитудой:

$$\zeta(m, t) = \xi(m) \exp[i\sigma t - \varkappa t], \qquad (9.14)$$

где $\varkappa$ определяется в хорошем приближении выражеиием (9.13). Следователь-

но, колебания возбуждаются, если $C_r > 0$, т.е. если $\varkappa < 0$, и затухают, если $\varkappa > 0$, т.е. если $C_r < 0$.

Основной эффект мнимой части C_i величииы C заключается во влиянии иа период пульсаций (разд. 9.3). В данном случае нмеем

$$\sigma \approx \Sigma + C_i/(2\Sigma^2 J), \tag{9.15}$$

где Σ^2 — вещественное число, определенное в разд. 8.10, а последиий члеи в правой частн обычно мал по сравиеиию с первым.

Следует отметнть, что величины в подынтегральном выражеиии для C должны быть вычислены, строго говоря, с помощью правильиых неаднабатических собствеииых функций рассматрнваемой задачн. Однако часто эти собственные функцин заранее ие известны. В таком случае уравненне (9.11) можно рассматрнвать как прнблнженное выраженне для величииы C, в котором правнльные собствеииые функции замеиены подходящими пробыми функциямн. Такая ситуация оказывается в определенной мере удовлетворительиой, и использованне пробных функций для приближеииого вычислеиия C нашло шнрокое распространение в теорни звездных пульсаций.

Обычный метод приближеиной оценкн C, часто применявшийся в прошлом и столь же часто примеияемый теперь, основан иа использоваиии квазиаднабатического прнближеиия. Это приближеиие заключается в вычислеиии подынтегральиой функции в выраженин для C с помощью решеиий лииейиого адиабатического волиового уравнения (гл. 8). В частиости, сиачала для коикретиой модели и рассматриваемой моды получают решение $\xi(m)$ лииейиого аднабатического волнового уравнення, а затем используют эту функцию при расчете величии $\delta T/T$, $d(\delta T/T)/dr$ и прочих с помощью адиабатических соотношеиий (5.36а) и (5.36б). Отсюда можно вычислить величиу $\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)$, входящую в подынтегральную функцию в выражеиии для C. Если виешние неадиабатические области в звезде не очеиь протяжеииые, то такой метод может дать приемлемое приближеииое зиачение C. Одиако этот метод всегда следует использовать с большой осторожностью. Его серьезным иедо-

ТАБЛИЦА 9.1

Времена затухания пульсаций для типичных пульсирующих звезд

Тип звезды	$\lvert \tau_d/\Pi_0 \rvert$ *)
Классические цефеиды, Переменные типа RR Лиры	$10^2 - 10^3$
Переменные типа δ Щита, Карликовые цефеиды	$10^4 - 10^6$
Переменные типа W Девы	$10 - 20$
Долгопериодические переменные (переменные типа Миры Кита)	$1 - 10$

*) Π_0 — период пульсаций в основной моде.

статком является, пожалуй, то, что величина δL_r, рассчитанная подобным образом, не остается постоянной в пространстве. Поэтому во внешних неадиабатических областях поведение величины δL_r, рассчитанной в квазиадиабатическом приближении, приводит к неоправданно завышенному ее вкладу в значение C. Простой приближенный способ для устранения указанной трудности состоит в интегрировании прн расчете C только до переходной областн (разд. 10.1).

В монографии Кокса н Джули [146, Ch. 27] можно найтн грубые оценки ожндаемых значений времен τ_d затухания амплнтуды пульсаций.

Табл. 9.1 суммнрует результаты детальных расчетов времен затухания для некоторых известных тнпов пульснрующих звезд (по данным обзора [133]). Значения прнведены по порядку величины в единицах периодов пульсаций в основной моде. По существу во всех случаях (за исключением, возможно, переменных типа Миры Кнта) времена затухания значнтельно превышают перноды пульсаций в основной моде.

9.2. Математические аспекты

В этом разделе мы исследуем некоторые математические аспекты проблемы линейиых радиальных неадиабатических пульсаций звезд. Ряд физических аспектов был рассмотрен в предыдущем разделе. В п. 9.2а мы проаиализируем проблему с довольио общей точки зрения, а современиые методы численного решеиия этой задачи для моделей звезд или звездных оболочек будут представлены в п. 9.2б. Наконец, в п. 9.2в мы перечислим некоторые основные особенности таких решений применительно к звездным моделям.

9.2 а. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Уравиеиия рассматриваемой задачи — это линеаризованные уравиения неразрывиости, импульса, зиергии, лучистого переноса и скорости генерации термоядерной энергии. (В принципе термин «лучистый перенос» следовало бы заменить на «перенос эиергии». Одиако поскольку в иастоящее время надежной количественной теории конвективного переноса тепла не существует и она вряд ли появится в ближайшее время, из практических соображеиий мы вправе использовать вышеупомянутый термин.) Примем, что лагранжевы вариации всех переменных зависят от времени по закону exp $[i\omega t]$, где $\omega = \pm\sigma + i\varkappa$, причем σ и $\varkappa$ вещественны. Период пульсаций определяется значением σ, а $\varkappa$ — коэффициент устойчивости (разд. 9.1). Знаки плюс и минус при σ не имеют физического смысла, а просто соответствуют величине $(i\omega)$ и ее комплексно сопряжеииому зиачению $(i\omega)^*$ (разд. 9.3) Зависимые переменные — зто пространственные части вариаций, например радиуса, плотности, температуры и светимости, для некоторого слоя вещества. Эти переменные мы будем обозначать соответственно ξ, $\delta\rho/\rho$, $\delta T/T$ и $\delta L_r/L_r$, рассматривая их как отиосительиые вариации и опуская индекс «sp». Такие обозначения будут использоваться далее всюду в этой главе. Кроме того, обычно будет опускаться индекс нуль у равновесных величин. В общем случае все эти переменные сле-

дует считать комплексными, поскольку их фазы, как правило, имеют различные значения вдоль радиуса звезды.

При указанной зависимости от времени основные дифференциальные уравнения в частных производных становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями с радиальным расстоянием в качестве независимой переменной. Эти уравнения являются линейными однородными уравнениями четвертого порядка относительно комплексных переменных, т.е. восьмого порядка относительно вещественных переменных. Таким образом, мы имеем четыре комплексные постоянные интегрирования и комплексную угловую частоту ω.

Если задана равновесная модель звезды или звездной оболочки, то имеются четыре граничных условия: два в центре или в основании оболочки, и два на поверхности. Эти граничные условия служат для определения четырех из пяти упомянутых комплексных постоянных. Вследствие однородности задачи одна из пяти комплексных постоянных должна оставаться произвольной и может быть использована для нормирования. Например, можно потребовать (как обычно и делают в таких расчетах), чтобы $\xi_R = 1$ (ξ_R — значение ξ на поверхности). Комплексным собственным значением является величина ω.

Разумные граничные условия обычно сводятся к тому, чтобы все относительные пульсационные переменные были регулярными как в центре, так и на поверхности. Очевидно, что в центре должны выполняться условия

$$\delta r = 0, \tag{9.16}$$

$$\delta L_r = 0. \tag{9.17}$$

Если рассматривается модель одной лишь оболочки, то в ее основании обычно принимают эти же условия (см. однако п. 9.2б). Поскольку как r, так и L_r в центре обращаются в нуль (L_r вблизи $r = 0$ изменяется пропорционально r^3), условие регулярности требует, чтобы как $\delta r/r = \xi$, так и $\delta L_r/L_r$ оставались в центре конечными (такое требование, разумеется, неприменимо к $\delta L_r/L_r$, если в ядре звезды $L_r \equiv 0$).

Условия (9.16) и (9.17) дают два комплексных соотношения между ω и значениями пульсационных переменных в центре (или в основании оболочки). Оба эти соотношения можно получить из уравнений неразрывности и энергии. Когда рассматривается полная модель звезды, а не только ее оболочка, уравнение неразрывности приводит к соотношению

$$(\delta\rho/\rho)_c = -3\xi_c, \tag{9.18}$$

где индексом c обозначены значения в центре. Уравнение энергии дает следующий результат [см. уравнение (7.12)]:

$$(\delta T/T)_c = (\Gamma_3 - 1)_c(\delta\rho/\rho)_c - (i/\omega)(\varepsilon/c_V T)_c \times$$
$$\times [\lambda_c(\delta\rho/\rho)_c + \nu_c(\delta T/T)_c - (\delta L_r/L_r)_c]. \tag{9.19}$$

Отметим, что выражения (9.18) и (9.19) содержат неизвестные параметры ω, ξ_c и $(\delta L_r/L_r)_c$. Если рассматривается лишь оболочка звезды, оба этих выражения обычно заменяют двумя другими, но эквивалентными соотношениями с

неизвестными параметрами ω, $d\xi/dr$ и $d(\delta L_r/L_r)/dr$, причем две последние величины представляют значения этих производных в основании оболочки.

Конкретный вид граничных условий на поверхности зависит от предположений, сделанных относительно поверхностных слоев равновесной модели, и может учитывать ряд специфических особенностей (см., например, [36, 68, 131, 281, 324, 588]). Если атмосфера не очень протяженная, то обычно с достаточной точностью можно принять граничное условие стоячей волны [скажем, уравнение (8.10)]. Это граничное условие можно записать и в следующем виде (см. разд. 8.3):

$$(d\delta P/dr)_R = 0. \tag{9.20}$$

Такая формулировка справедлива, если на поверхности звезды плотность обращается в нуль.

Второе граничное условие на поверхности получают из уравнения для светимости. Обычно в поверхностных слоях можно предполагать чисто лучистый перенос энергии, но его можно описывать в различных приближениях. В простейшем случае, который исторически был рассмотрен одним из самых первых (см., например, [131]), принимают, что температура поверхности T_R равна нулю. Тогда условие регулярности требует, чтобы

$$\delta T_R = 0. \tag{9.21}$$

Если принять, что на поверхности справедливо приближение лучистой теплопроводности, то уравнение (9.21) вместе с предположением $T_R = 0$ и с условием регулярности приводит к следующему соотношению [см. уравнение (7.11)]:

$$(\delta L_r/L_r)_R = 4\xi_R - n_R(\delta\rho/\rho)_R + (s+4)_R(\delta T/T)_R, \tag{9.22}$$

где n_R и $-s_R$ — значения показателей степени в законе непрозрачности при плотности и температуре вблизи поверхности звезды соответственно.

В более реалистичном случае фотосферных граничных условий подходящее граничное условие для δT можно получить следующим образом. Если звездная атмосфера считается тонкой по сравнению с радиусом звезды и если изменения в ней происходят «неслишком быстро» (разд. 8.3), то зависимость температуры T от оптической глубины τ приближенно определяется моделью серой атмосферы (см., например, [372, 629]). Далее, связь изменения ΔL светимости L с изменениями Δr_{ph} и ΔT_e — радиуса фотосферы и эффективной температуры звезды соответственно — определяется путем варьирования соотношения $L \propto r_{\mathrm{ph}}^2 T_e^4$. Если принять, что изменение δT температуры элемента массы обусловлено изменениями как T_e, так и τ (оптическая глубина, на которой находится элемент массы), то соотношение температура — оптическая глубина для серой атмосферы показывает, что на малых оптических глубинах ($\tau \ll 1$) $\delta T/T \approx \Delta T_e/T_e$. Подставляя этот результат в соотношение, связывающее ΔL, Δr_{ph} и ΔT_e, и предполагая, что $\delta r \approx \Delta r_{\mathrm{ph}}$ и $\delta L_r \approx \Delta L_r$ для заданного уровня (по массе) в атмосфере, получим

$$(\delta L_r/L_r)_R = 2\xi_R + 4(\delta T/T)_R. \tag{9.23}$$

Это соотношение обычно и используют как граничное условие для величины δT на уровне фотосферы.

Отметим, что, какое бы из уравнений (9.22) или (9.23) ни использовалось в качестве поверхностного граничного условия для δT, остаются неопределенными два параметра: ω и одна из величин $(\delta T/T)_R$, $(\delta L_r/L_r)_R$. Причина заключается в том, что граничное условие (9.20) определяет величину $(\delta P/P)_R$ (в предположении, что ξ_R уже выбрано), которая в свою очередь через уравнение состояния зависит от $(\delta\rho/\rho)_R$ и $(\delta T/T)_R$. Напомним, что центральные граничные условия оставляют неопределенными величины ω, ξ_c (или $(\delta\rho/\rho)_c$) и $(\delta L_r/L_r)_c$. Поэтому условие, чтобы четыре переменные ξ, $\delta P/P$, $\delta T/T$ и $\delta L_r/L_r$ были непрерывными по всей звезде, оказывается достаточным для определения значений всех четырех неизвестных (в общем случае комплексных) для каждой исследуемой моды. Таким образом, выполнение граничных условий является необходимым, по крайней мере в принципе, для определения детальных характеристик неадиабатических звездных пульсаций.

Полезно заметить, что если давление P на поверхности обращается в нуль (обычно это превосходное приближение), то из уравнения энергии, скажем (7.8), вытекает следующее соотношение:

$$[d(\delta L_r/L_r)/dr]_R = 0. \tag{9.24}$$

Данный результат согласуется с концепцией пространственно неизменных вариаций светимости во внешних слоях звезд (разд. 9.1).

Кроме того, можно показать (см. [346]), что если плотность ρ на поверхности обращается в нуль, то

$$[d^2(\delta L_r/L_r)/dr^2]_R = 0. \tag{9.25}$$

Следует подчеркнуть, что выражения (9.24) и (9.25) — это не граничные условия, а просто некоторые выводы, справедливые при указанных предположениях.

9.2б. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Численное решение задачи о собственных значениях сопряжено с определенными вычислительными трудностями (см., например, [36, 131]), и лишь в последние годы были развиты достаточно эффективные методы (см. [68, 281]). (Бейкер и Киппенхан [37] в 1965 г. разработали метод, который до некоторой степени похож на методы Кастора [68] и Ибена [281], однако они не вычисляли ω как собственное значение полной неадиабатической задачи.)

Трудности обусловлены в основном тем, что по всей звезде пульсации являются почти адиабатическими. Следовательно, если не использовать специальных приемов, то обычные методы сшивки, основанные на общих соображениях п. 9.2а, сталкиваются с серьезными практическими проблемами. Например, при численном интегрировании от поверхности к центру с использованием поверхностных граничных условий в решениях всегда появляются быстро расходящиеся члены, которые в конце концов делают результаты такого интегрирования практически непригодными.

Бейкер и Киппенхан [36] и Кокс [131] избежали эту трудность, заменив

внутренние граничные условия внутренним адиабатическим условием, приведенным выше, т.е. потребовав, чтобы по мере интегрирования вглубь решение стремилось к адиабатическому пределу. Таким путем для заданного значения ω были получены точные решения уравнений только для внешних слоев с температурой менее $\sim 10^5$ К (что обычно соответствует глубине от 0,05 до 0,5 радиуса звезды). В этих ранних исследованиях угловая частота пульсаций σ либо предполагалась известной из наблюдений или теории, как в [131], либо же определялась из решения адиабатического волнового уравнения [36]. При нахождении решения дифференциальных уравнений коэффициент устойчивости $\varkappa$ принимался равным нулю, а затем оценивался с помощью интегральных выражений (разд. 9.3), в которых использовались полученные решения. Такой метод определения коэффициента $\varkappa$ является довольно точным, если $|\varkappa/\sigma| \ll 1$, что обычно имеет место (разд. 9.1). В работах [131, 132, 345, 465] можно найти ссылки на еще более ранние приближенные методы исследования неадиабатических эффектов.

В современных вычислительных методах ядро звезды обычно не учитывается. Однако эти методы можно непосредственным и почти тривиальным образом обобщить, чтобы при необходимости или при желании учитывать и ядро (см., например, [154, 155, 640, 641]).

Теперь мы кратко опишем метод решения линейного неадиабатического волнового уравнения, предложенный и применявшийся Кастором [68]. Часть излагаемого материала основана на неопубликованных заметках Кастора и используется с его любезного согласия.

Покажем сначала, что соответствующие линеаризованные дифференциальные уравнения можно представить в специальном виде, на который и опирается метод. В этом методе в качестве основных уравнений рассматриваются уравнения импульса и энергии, поскольку только они обычно содержат в явном виде производные по времени. Уравнение импульса можно записать в форме (7.5), а уравнение энергии для термодинамически обратимых процессов (мы рассматриваем только их) в форме (7.10). Отметим, что в левой части уравнения импульса содержится величина $\delta\ddot{r} \equiv \partial^2(\delta r)/\partial t^2$, а в правой — δr и $\partial(\delta P)/\partial m$. Уравнение энергии содержит в левой части величину $T\delta\dot{s}$, а в правой — $\delta\varepsilon$ и $\partial(\delta L_r)/\partial m$. Однако величину $\delta\varepsilon$ можно считать функцией $\delta\rho$ и δT [см. уравнение (7.12)]. Аналогичным образом δL_r можно считать по крайней мере для переноса энергии в приближении лучистой теплопроводности функцией δr, $\delta\rho$, δT и $\partial(\delta T)/\partial m$ [см., например, выражение (7.11)]. Далее, на основании термодинамических соотношений (5.35а) и (5.35б) величины δT и δP можно рассматривать как функции $\delta\rho$ и $T\delta s$. В свою очередь величину $\delta\rho$, согласно уравнению неразрывности [см., например, (5.24б) или (7.4)], можно считать функцией δr и $\partial(\delta r)/\partial m$. Таким образом, правые части уравнений импульса и энергии зависят в конечном счете от величин δr и $T\delta s$ и от их производных по m. Принимая зависимость от времени в форме $\exp(i\omega t)$, мы видим, что левые части этих уравнений являются функциями только от δr и $T\delta s$. Поэтому величины δr и $T\delta s$ можно взять в качестве основных зависимых перемен-

ных и записать уравнения импульса и энергии в следующем операторном виде:

$$\omega^2 \delta r = G_1(\delta r) + G_2(T\delta s), \tag{9.26а}$$

$$i\omega T\delta s = K_1(\delta r) + K_2(T\delta s), \tag{9.26б}$$

где G и K — линейные операторы. Прямым, но громоздким путем можно показать, что

$$G_1(y) \equiv -4Gmy/r^3 - 4\pi r^2 \partial[(\Gamma_1 P/V)\partial(4\pi r^2 y)/\partial m]/\partial m, \tag{9.27}$$

$$G_2(y) \equiv 4\pi r^2 \partial[(\Gamma_3 - 1)y/V]/\partial m \tag{9.28}$$

и для переноса энергии в приближении лучистой теплопроводности

$$K_1(y) \equiv [(\partial\varepsilon/\partial V)_T - (\partial\varepsilon/\partial T)_V(\Gamma_3 - 1)T/V]\partial(4\pi r^2 y)/\partial m - \partial(L_r 4\pi r^2 y/\pi r^3)\partial m +$$
$$+ \partial\{(L_r/\varkappa)[(\partial\varkappa/\partial V)_T - (\partial\varkappa/\partial T)_V(\Gamma_3 - 1)(T/V)]\partial(4\pi r^2 y)/\partial m\}/\partial m -$$
$$- \partial\{(4\pi r^2)^2(ac/3\varkappa)\partial[4(\Gamma_3 - 1)(T^4/V)\partial(4\pi r^2 y)/\partial m]/\partial m\}/\partial m, \tag{9.29}$$

$$K_2(y) \equiv (\partial\varepsilon/\partial T)_V y/c_V + \partial[(L_r/\varkappa c_V)(\partial\varkappa/\partial T)_V y]/\partial m +$$
$$+ \partial[(4\pi r^2)^2(ac/3\varkappa)\partial(4T^3 y/c_V)/\partial m]/\partial m. \tag{9.30}$$

В этих формулах $V \equiv 1/\rho$ — удельный объем, ε — скорость генерации энергии на единицу массы, $\varkappa$ — непрозрачность, а остальные символы имеют обычные значения. Кроме того, мы опустили индекс 0 у всех равновесных величин. Легко видеть, что G_1, G_2, K_1 и K_2 — это дифференциальные операторы соответственно второго, первого, третьего и второго порядка. Кроме того, $G_1(\delta r)/r$ совпадает с $\mathscr{L}(\delta r/r)$, где $\mathscr{L}$ — линейный оператор, определенный выражением (8.23).

Интересно исследовать операторы G и K для случая, когда все коэффициенты можно считать постояннымн. Такое рассмотрение позволит по порядку величины оценить влияиие этих операторов. Кроме того, следуя Кастрру, оставнм в каждом соотношении только члены с прознводными самого высокого порядка. В этом случае можно получнть относнтельно простые и верные по порядку величины выражеиия для $|G_1|$, $|G_2|$, $|K_1|$ и $|K_2|$, иа основе которых можно дать физическую интерпретацию операторов. Например, подставляя вместо $\partial/\partial r$ l^{-1}, где l — характерная длина, можно показать, что

$$|G_1| \sim (\text{Время прохождеиия звуковой волной расстояния } l)^{-2}, \tag{9.31}$$

$$|K_2| \sim (\text{Время охлаждеиия посредством излучения области с характерным размером } l)^{-1}. \tag{9.32}$$

Интересно также отметить, что

$$|G_1/G_2| \sim |K_1/K_2| \sim v_S^2 \partial/\partial r, \tag{9.33}$$

где v_S — адиабатическая скорость звука. Из соотношения (9.33) вытекает

$$|G_1(\delta r)/G_2(T\delta s)| \sim |K_1(\delta r)/K_2(T\delta s)| \sim |[\delta\rho/\rho]/[(T\delta s)/c_V T]|, \tag{9.34}$$

где мы использовали приближенное соотношение $|\partial(\delta r)/\partial r| \sim |\delta\rho/\rho|$ и, кроме того, $v_S^2 = \Gamma_1 P/\rho \sim c_V T$.

Соотношение (9.34) устанавливает, что в обоих основных уравнениях (9.26а) и (9.26б) отношение первого и второго членов в правых частях того же порядка величины, что и отношение относительной флуктуации плотности $\delta\rho/\rho$ в течение периода к соответствующему изменению количества тепла $\delta q = T\delta s$ на единицу массы, выраженному в долях удельной внутренней энергии, приблизительно равной $c_V T$. В глубоких недрах звезды, где $c_V T$ относительно велико, $|G_1(\delta r)| \gg |G_2(T\delta s)|$ и $|K_1(\delta r)| \gg |K_2(T\delta s)|$, и только во внешних слоях оба члена в каждой паре становятся сравнимыми друг с другом.

Можно сказать, что член $G_2(T\delta s)$ учитывает влияние неадиабатичности на звездные пульсации, а член $K_1(\delta r)$ определяет тепловые потоки, обусловленные адиабатическими флуктуациями температуры, которые в свою очередь связаны с динамическими движениями. Приближение $i\omega T\delta s = K_1(\delta r)$ иногда называют квазиадиабатическим приближением (разд. 9.1).

В случае $G_2 = 0$ или $K_1 = 0$ имеем соответственно либо чисто адиабатические, либо чисто тепловые пульсации (гл. 8).

Используя разностную схему, подобную построенной выше при рассмотрении линейного адиабатического волнового уравнения (разд. 8.12б), уравнения (9.26) можно заменить следующими матричными уравнениями:

$$\omega^2 \mathbf{X} = G1\mathbf{X} + G2\mathbf{Y}, \tag{9.35а}$$

$$i\omega \mathbf{Y} = K1\mathbf{X} + K2\mathbf{Y}, \tag{9.35б}$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — матрицы-столбцы. Столбец $\mathbf{X}$ состоит из $J + 1$ элемента (J — число зон в модели), а $\mathbf{Y}$ — из J элементов. Кроме того,

$$X_i = (\mathscr{D}M_i)^{1/2}\delta r_i, \quad Y_{i-1/2} = (T\delta s)_{i-1/2}, \tag{9.36}$$

$i = 1, \ldots, J$; величина $\mathscr{D}M_i$ определена в п. 8.12б, а каждая из величин $G1$, $G2$, $K1$ и $K2$ представляет собой квадратную матрицу $J \times J$, многие элементы которой равны нулю.

В рамках принятой в п.8.12б разностной схемы видно, что для каждого X_i (но неблизкого к любой из границ) уравнение импульса (9.35б) содержит величины X_{i-1}, X_{i+1}, $Y_{i-1/2}$, $Y_{i+1/2}$, три элемента матрицы $G1$ и два элемента матрицы $G2$. Аналогично для каждого $Y_{i-1/2}$ (также неблизкого к границам) уравнение энергии (9.35б) содержит величины $Y_{i-3/2}$, $Y_{i+1/2}$, X_{i-2}, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, четыре элемента матрицы $K1$ и три элемента матрицы $K2$. Таким образом, в этой разностной схеме уравнения (9.35) связывают семь последовательных «точек» модели, где под «точкой» мы понимаем либо поверхность раздела, либо середину зоны.

Явные выражения для этих матричных элементов, как правило, довольно сложные; некоторые конкретные примеры приведены Кастором [68]. В любом случае значения матричных элементов зависят от равновесной модели, граничных условий и т.д. и предполагаются известными.

Граничные условия могли бы выглядеть, например, следующим образом. В центре или в основании оболочки

$$\delta r_0 = 0 \qquad (\text{т.е. } X_0 = 0), \qquad \delta L_0 = 0. \tag{9.37}$$

На поверхности имеется ряд возможностей для выбора (разд. 9.2а), но целесообразно принять такие условия:

$$(\delta P/P)_{J-\frac{1}{2}} = -(\omega^2 r_J^3/GM + 4)\delta r_J/r_J,$$
$$\delta L_J/L_J = 2\delta r_J/r_J + 4\delta T_{J-\frac{1}{2}}/T_{J-\frac{1}{2}}. \quad (9.38)$$

Конкретные граничные условия того или иного вида заметно влияют на значения матричных элементов в уравнениях (9.35), особенно вблизи границ. Вблизи этих границ уравнения (9.35) упрощаются, поскольку величины с отрицательными индексами или с индексами, большими J, не определены.

Если говорить конкретнее, то, как отметил Кастор [68], чтобы применить граничные условия, необходимо отбросить в уравнениях самую внутреннюю и самую внешнюю поверхности раздела (0 и J), а также самую внутреннюю и самую внешнюю зоны (1 и J). Можно показать, что граничные условия (9.37) и (9.38), используемые для этих зон и поверхностей раздела (какое бы число зон и поверхностей раздела ни рассматривалось), вместе с оставшимися уравнениями дают как раз правильное число уравнений для $2J + 1$ неизвестного нашей задачи. Эти рассуждения эквивалентны отбрасыванию величин с отрицательными индексами (таких, как X_{-1}) или с индексами, большими J (таких, как X_{J+1}), и присвоению специальных значений соответствующим матричным элементам.

Следуя Кастору [68], уравнения (9.35) можно записать как одно матричное уравнение, если объединить переменные (чередуя их) в одну матрицу-столбец $\mathbf{Z}$, состоящую из $2J$ элементов: $Y_{\frac{1}{2}}, X_1, Y_{\frac{3}{2}}, X_2, \ldots, Y_{J-\frac{1}{2}}, X_J$ (принимая $X_0 = 0$). Таким образом, уравнения (9.35) можно представить в виде

$$\mathscr{M}\mathbf{Z} = 0, \quad (9.39)$$

где $\mathscr{M}$ — комплексная матрица, состоящая из $(2J) \times (2J)$ элементов (поскольку ее элементы комплексные) и являющаяся ленточной матрицей, причем ширина «ленты» не более семи элементов. Отметим, что первая строка матрицы $\mathscr{M}$ связана только с уравнением энергии (9.35б), а последняя — только с уравнением импульса (9.35а).

Рассмотрим теперь метод нахождения собственных значений ω^2 и собственных векторов матричного уравнения (9.39). Поскольку уравнение является однородным, его можно решить относительно собственных векторов, только если известны собственные значения, а они, конечно, заранее не известны.

Кастор [68] предполагает, что соответствующая адиабатическая задача уже решена, т.е. известны адиабатические собственные векторы. Затем он использует их для получения первых пробных оценок неадиабатических собственных частот, основываясь, по существу, на интегральных выражениях, аналогичных рассматриваемым в разд. 9.3. Но такие пробные оценки все еще не удовлетворяют уравнению (9.39), и поэтому далее используется следующая процедура.

Кастор [68] убирает из системы (9.39) последнее уравнение — уравнение

импульса для самой внешней поверхности раздела. Тогда матричное уравнение (9.39) заменяется уравнением

$$\mathcal{M}'\mathbf{Z}' = \mathbf{W}, \tag{9.40}$$

где матрица $\mathcal{M}'$ — это матрица $\mathcal{M}$ без последней строки и последнего столбца; $\mathcal{M}'$ содержит $(2J - 1) \times (2J - 1)$ элемент. Столбец $\mathbf{Z}'$ — это столбец $\mathbf{Z}$ без одного элемента (а именно, без элемента X_J, который в конечном счете для нормировки принимают равным единице); $\mathbf{W}$ — матрица-столбец, все элементы которой, за исключением нескольких последних, равны нулю. Поскольку уравнение (9.40) теперь уже неоднородное, ω в нем не обязательно будет собственной частотой. Следовательно, для заданного Ω уравнение (9.40) можно решить относительно $2J - 1$ неизвестного $Y_{1/2}$, X_1, $Y_{3/2}, \ldots$, X_{J-1}, $Y_{J-1/2}$, выразив неизвестные через X_J. Поскольку ω уже не обязательно собственное значение, последнее уравнение системы, которое было опущено, может и не удовлетворяться. Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$f(\omega) \equiv G1(J, 1)X_{J-1} + G2(J, 1)Y_{J-1/2} + [G1(J, 2) - \omega^2]X_J, \tag{9.41}$$

где $f(\omega) = 0$ при $\omega = \omega_0$ (ω_0 — собственная частота) и где $G1$ и $G2$ — элементы матриц.

Далее Кастор [68] замечает, что X_{J-1}, $Y_{J-1/2}$ и X_J — рациональные функции (равные отношению двух полиномов), поскольку каждая из них является решением совместной системы линейных алгебраических уравнений. Следовательно, функция $f(\omega)$ регулярна всюду, за исключением своих полюсов (см. любой учебник математического анализа, например [225]). Поэтому любая подходящая схема нахождения корней регулярных функций должна быть пригодной для определения собственной частоты, т.е. такого значения $\omega (= \omega_0)$, для которого $f(\omega) = 0$.

Метод Кастора [68] — это метод секущей, основанный на использовании значений ω_{k-1} и ω_k двух предыдущих итераций для получения нового значения ω_{k+1}, в предположении, что функция $f(\omega)$ линейна в окрестности ω_0.

С помощью указанного метода, решая в каждой итерации систему (9.40), добиваются того, чтобы уравнение $f(\omega) = 0$ удовлетворялось с некоторой заданной точностью. (Конечно, все операции следует выполнять по правилам алгебры комплексных чисел.) Второе пробное значение ω, необходимое для этого метода, можно получить, например, посредством некоторого произвольного изменения первого пробного значения. Таким способом в конце концов определяют ω_0 — собственную частоту исследуемой моды, а также соответствующие собственные векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Кастор указал на одну трудность в использовании этого метода. Он отметил, что функция $f(\omega)$ вблизи каждого нуля $\omega = \omega_0$ имеет полюс $\omega = \omega_p$. Этот полюс соответствует такому значению ω, при котором $\delta r_J = 0$. Поскольку все величины X_i и $Y_{i-1/2}$ обычно нормированы на значение $X_J = 1$, отсюда следует, что при $\omega = \omega_p$ $Y_{i-1/2}/X_J = \infty$, $X_i/X_J = \infty$ $(i = 1, \ldots, J - 1)$. Если $|\omega - \omega_0| > |\omega - \omega_p|$, то метод секущей либо не пригоден, либо дает очень медленную сходимость.

Рецепт Кастора для устраиеиия этой трудиости заключается в том, чтобы разделить $f(\omega)$ иа такую произвольиую функцию, которая имеет полюс, совпадающий с полюсом фуикции $f(\omega)$. В качестве такой фуикции ои выбирает $X_1(\omega)$ и определяет

$$g(\omega) \equiv f(\omega)/X_1(\omega). \tag{9.42}$$

Преимущество выбора X_1 в качестве этой произвольиой функции состоит в том, что оиа ие имеет нулей для любой из иизших мод пульсаций. Далее Кастор предлагает использовать $g(\omega)$ вместо $f(\omega)$ в методе ссекущей. Такой прием улучшает сходимость и в то же самое время позволяет обойти трудиость, связаииую с существованием полюса. Дополиительиые сведеиия можио иайти в статье Кастора [68].

Накоиец, мы попытаемся четко определить, что же подразумевается под термииом «мода» в примеиеиии к лииейиым, ио иеадиабатичесим пульсациям. Поскольку при таких пульсациях система иикогда ие проходит точио через свое равиовесиое состояиие (разд. 9.1), узлов, характеризуемых смещеиием $\xi = 0$, при неадиабатических пульсациях ие существует. Следовательио, узлы иельзя использовать для характеристики мод (аналогичиая до иекоторой степеии ситуация имеет место и в случае иерадиальиых колебаний; см. гл. 17). Под термином «мода» мы будем подразумевать просто одио из собствеииых решений лииейиых иеадиабатических уравиеиий. Если иеадиабатические эффекты малы или, что приблизительио эквивалеитио, если $|\varkappa/\sigma| \ll 1$ (эти условия уверенно выполияются в большииcтве типов пульсирующих звезд; разд. 9.1), то, по-видимому, существует хорошо определеииое взаимио одиозиачиое соответствие между модами пульсаций в иеадиабатическом и адиабатическом случаях, и в обоих классах задач имеется аналогичиая упорядочеииость мод. В случае иеадиабатических пульсаций «узел» — это обычио сферическая поверхиость, иа которой $|\xi|$ достигает четкого мииимума с очень малым зиачеиием и при переходе через которую фаза смещеиия ξ измеияется почти точио иа π радиаи. Как показывают расчеты, иеадиабатические эффекты, если только оии ие чрезмерио велики, оказывают очеиь слабое влияиие иа положеиие узлов.

9.2 В. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕАДИАБАТИЧЕСКИХ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Здесь мы суммируем иекоторые из осиовиых свойств решений линейиого иеадиабатического волнового уравиеиия для «реалистичиых» звездиых моделей, лежащих в «области цефеид» иа диаграмме Герцшпрунга — Рессела. Приводимые замечания осиоваиы иа моделях, в которых предполагается только лучистый переиос, даже если их параметры в иекоторых случаях таковы, что, согласио совремеииым представлеииям, в их оболочках может возиикать коивекция. Осиовиым оправданием того, что мы ограиичиваемся только лучистыми моделями, служит иеудовлетворительиое состояние иаших зиаиий о коивекции в реальиых звездах.

1. Неадиабатические периоды, по крайией мере в осиовиой моде, обычио, по-видимому, короче соответствующих адиабатических периодов, ио, как

правило, незначительно. Типичная разность составляет всего несколько десятых процента, однако в некоторых случаях при сравнительно большом отношении равновесной светимости к массе, она может достигать 2 — 3%. Вуд [628], исследуя гораздо более сильную неадиабатичность, нашел, что неадиабатические периоды иногда превышали адиабатические и что различие между ними часто было гораздо больше приведенных значений. При этом отмечены и другие интересные эффекты, связанные с собственными функциями. Аналогичные результаты были получены в работах [302, 303].

2. Поведение неадиабатической относительной амплитуды пульсаций $\xi(r)$ вдоль радиуса не очень отличается от соответствующей адиабатической относительной амплитуды $\xi_{ad}(r)$, по крайней мере в областях ниже зоны ионизации водорода. Следовательно, $\xi(r)$ (нормированное к единице на поверхности) почти вещественно, т.е. пульсации представляют собой почти стоячие волны. (Однако $\delta L_r/L_r$ и $\delta\rho/\rho$ приблизительно совпадают по фазе только в недрах. Около поверхности $\delta L_r/L_r$ может значительно отличаться по фазе от $\delta\rho/\rho$, что проявляется в существовании фазового запаздывания в поверхностных изменениях светимости; гл. 11.)

В лучистых моделях, попадающих в «область цефеид» на диаграмме Герцшпрунга — Рессела, $\xi(r)$ обычно близко к единице; а в зоне ионизации водорода и выше нее может даже превысить единицу. Такое поведение — чисто неадиабатический эффект, связанный в конечном счете с тем, что для лучистых моделей $|dT_0/dr|$ в зоне ионизации водорода, как правило, очень велико (гл. 11). Ниже этой зоны $\xi(r)$ по мере продвижения вглубь быстро приближается к $\xi_{ad}(r)$.

3. С продвижением в недра пульсации быстро становятся адиабатическими. Это означает, что при рассмотрении все более глубоких слоев адиабатические соотношения (5.36) оказываются все более хорошим приближением.

9.3. Интегральные выражения для собственных значений

Итак, задачу о малых неадиабатических радиальных пульсациях можно точно решить только путем нахождения численных решений сложной задачи о собственных значениях для системы уравнений высокого порядка. Ясно, что эти решения зависят от принятого механизма переноса тепла. Однако довольно глубокого понимания общего поведения решения в зависимости от времени, а также ряда других особенностей можно достичь с помощью подхода, основанного на формальных интегральных выражениях для собственных значений. Эти интегральные выражения являются общими в том смысле, что они не связаны ни с какими явными предположениями о физической природе механизма переноса энергии. Однако, чтобы интегральные выражения давали точные численные результаты для собственных значений, функции, входящие в них, должны быть собственными функциями, а последние обычно не известны, пока не решена конкретная задача о собственных значениях. Тем не менее, как и в случае интегральных выражений, выведенных в разд. 8.8 для собственных значений адиабатических пульсаций, часто можно

получить вполне приемлемое приближение для неадиабатических собственных значений, используя вместо собственных функций приближенные пробные функции. Эти пробные функции, по существу, произвольные, но они должны быть достаточно регулярными. Однако, поскольку неадиабатическая задача не обладает свойством самосопряженности, такие интегральные выражения не удовлетворяют принципу экстремума в отличие от случая адиабатических пульсаций (разд. 8.10). Следовательно, чтобы интегральные выражения давали хорошее приближение для собственных значений, пробные функции должны быть как можно более точными. Использование интегральных выражений сыграло важную роль в развитии теории звездных пульсаций.

Подробные выводы интегральных выражений и их обсуждение содержатся, например, в работах [146, Ch. 27;336], а также [5, 6, 144, 148, 156] (причем в пяти последних рассматривается применение интегральных выражений при отсутствии теплового равновесия; см. разд. 19.4), поэтому здесь мы ограничимся только кратким изложением.

Рассматриваемые интегральные выражения основаны на линейном неадиабатическом волновом уравнении, одной из форм которого является уравнение (7.15). Зависимость всех вариаций от времени принимается такой же, как в уравнениях (9.8) и (9.9). Далее, линейное неадиабатическое волновое уравнение умножают на $\xi^* r^2 dm$ (где звездочка обозначает комплексно сопряженную величину), а затем интегрируют по полной массе звезды. В результате получают уравнение третьего порядка

$$i\omega(\omega^2 - \Sigma^2) = C/J, \tag{9.43}$$

решения которого и дают искомые интегральные выражения для собственного значения ω. Здесь J — осцилляторный момент инерции звезды для рассматриваемой моды [см. выражение (8.26)]. Величина Σ^2 определяется следующим соотношением:

$$\Sigma^2 J \equiv \int_M \xi^* \mathcal{L}(\xi) r^2 dm =$$
$$= \int_M \{16\pi^2\Gamma_1 P\rho r^6 |d\xi/dm|^2 - 4\pi r^3 |\xi|^2 d[(3\Gamma_1 - 4)P]/dm\} dm, \tag{9.44}$$

где во втором равенстве использовано предположение, что давление P обращается в нуль на поверхности, т.е. при $m = M$; $\mathcal{L}$ — линейный оператор, определенный выражением (8.23). Наконец, если на поверхности $\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_{\rm sp} = 0$, то имеем следующее выражение для C:

$$C = \int_M (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)^*_{\rm sp}\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_{\rm sp} dm = C_r + iC_i, \tag{9.45}$$

причем C_r и C_i вещественны. Сравнение выражения (9.45) с (9.3), (9.10) и (9.11) показывает, что вещественная часть C_r величины C пропорциональна $\langle dW/dt \rangle$, т.е. скорости (усредненной по периоду), с которой сила гравитации

н силы, обусловленные иаличнем градиента давления, совершают работу над всей звездой. Как указывалось, C_i в основном влияет на пернод пульсацнй (см. ниже).

Рассмотрнм теперь решенне уравнения (9.43). В общем случае оно имеет три корня. Один из них, скажем ω_1, обычно очень мал и можно показать (см., напрнмер, [146, Ch. 27]), что он связан с проблемой вековой неустойчивости звезд; для нас зтот корень сейчас не представляет непосредственного интереса. При изучении пульсирующих звезд намного более интересны оба больших корня, скажем $i\omega_2$ и $i\omega_3$. Оба эти решения определяются следующим выражением, в котором выделены вещественная и мнимая части (см., например, [146, Ch. 27]):

$$i\omega_{2,3} = i[\pm \Sigma + \tfrac{1}{2}C_i/(\Sigma^2 J) \pm \tfrac{3}{8}(C_r^2 - C_i^2)/(\Sigma^5 J^2)] + $$
$$+ [\tfrac{1}{2}C_r/(\Sigma^2 J) \mp \tfrac{3}{4}C_r C_i/(\Sigma^5 J^2)] + O(\delta^3), \qquad (9.46)$$

где $\delta \equiv |C/J\Sigma^3| \sim t_{ff}/t_K \ll 1$, [что и использоваио в (9.46)], а C_r и C_i — вещественная и миимая части C [см. формулу (9.45)]. Каждый из корней в (9.46) содержит либо все верхиие, либо все нижиие знаки. По модулю оба зти корня равны; они описывают один и тот же вид физических движений в звезде (как впервые отметил Ибен [281]; см. также [356]). Две последовательности знаков в (9.46) просто соответствуют корню $i\omega$ и его комплексно сопряженному значенню $(i\omega)^*$. Можио показать, что если в дифференциальных уравнениях заменить $(i\omega)$ на $(i\omega)^*$, то все пульсационные перемениые следует заменнть нх комплексно сопряженнымн значеннямн. Такая замена приводит к изменению знака C_i. Тогда, очевидно, $i\omega_3 = (i\omega_2)^*$, т.е. оба корня соответствуют одному и тому же физическому поведению звезды.

Уравнение (9.46) описывает колебательное движение с периодом $\Pi = 2\pi/\prod$, где $\prod \approx \sigma$ (σ — адиабатическая угловая частота пульсаций). Если $\delta \ll 1$, то амплитуда этого движения лнбо медленно растет со временем, либо медленно затухает в соответствии с выражением (9.14). Согласно уравненню (9.46), коэффициент устойчнвости $\varkappa$ (разд. 9.1) с точностью до первого порядка относительно δ определяется соотношением (9.13). Ясно, что C_i сильнее всего влияет на период пульсаций модели, как и было указано выше.

9.4. Оценка коэффициента устойчивости Эддингтоном

Эддингтон [197, Ch. 8] был, вероятно, первым, кто вывел выраженне для козффицнента устойчивости $\varkappa$ (разд. 9.1). Его вывод основывался на остроумном аналнзе с нспользованнем знтропии, и он рассматривал только термодинамически обратимый случай в линейной теории. Мы кратко изложим вывод Эддингтона и одновременно обобщим его на нелинейный необратимый случай, что, оказывается, легко сделать.

Эддингтон прежде всего принял, что коэффициент устойчивостн определяется выражением

$$\varkappa = -\tfrac{1}{2}\langle d(\delta\Psi)/dt\rangle/\langle\delta\Psi\rangle, \qquad (9.47)$$

где $\delta\Psi$ — полная энергия пульсаций, которая будет определена ниже (в общем случае эта величина не совпадает с $\delta\Psi$ из разд 9.1), а угловые скобки означают усреднение по полному периоду П. Затем Эддингтон оценил числитель этого выражения, использовав теорему энергии в форме (4.52).

Применим эту теорему как к пульсирующему, так и к непульсирующему состоянию звезды, обозначая последнее состояние индексом 0 и считая его состоянием полного равновесия (разд. 5.2). Вычитая одно уравнение из другого, получим выражение для $d\delta\Psi/dt$, где полная энергия пульсаций определяется следующим нелинейным выражением:

$$\delta\Psi \equiv \int_M [\dot{r}^2/2 - (Gm/r - GM/r_0) + (E - E_0)]dm. \tag{9.48}$$

Числитель уравнения (9.47) получают затем из соотношения

$$\Pi\langle d(\delta\Psi)/dt\rangle = \int_M dm \oint (dq/dt)dt, \tag{9.49}$$

где интегрирование по времени следует проводить по полному замкнутому циклу колебаний. Требуя, чтобы цикл был замкнутым, мы интерпретируем левую часть уравнения (9.49) как количество энергии, которое в течение одного периода отводится от звезды или добавляется к звезде при строго периодическом движении. Можно показать, что такая интерпретация согласуется с результатами и выводами предыдущих разделов данной главы, если характерное время затухания $|\varkappa|^{-1}$ велико по сравнению с периодом П.

Эддингтон хотел оценить интегралы в правой части уравнения (9.49), используя величины только первого порядка, известные из некоторого приближенного решения линеаризованных уравнений. Однако это решение требует, чтобы величина dq/dt менялась синусоидально со временем. Если это условие выполняется, то очевидно, что интеграл по замкнутому циклу в уравнении (9.49) обращается в нуль. Поэтому Эддингтон стремился найти метод, который давал бы значение интеграла по циклу колебаний с точностью до второго порядка, но с помощью величин, известных с точностью только до первого порядка.

Он принял во внимание следующее обстоятельство, связанное с энтропией (мы обобщим этот подход на необратимый случай). Если предполагается, что в конце периода звезда точно возвращается в исходное состояние, то ясно, что для каждого элемента массы результирующее изменение ds его удельной энтропии s за период будет равно нулю. Величина ds определяется общим термодинамическим соотношением

$$ds = dq/T + d\sigma, \tag{9.50}$$

где dq — результирующее приращение количества тепла на единицу массы, T — мгновенное значение температуры, а $d\sigma$ — изменение удельной энтропии, обусловленное только необратимыми процессами, такими, как вязкость. Согласно второму началу термодинамики, всегда $d\sigma \geqslant 0$. Кроме того, можно записать следующее тождество:

$$1/T \equiv 1/T_0 - (T - T_0)/TT_0, \tag{9.51}$$

где T_0 — произвольная фнксированная температура, в качестве которой можно принять, если удобно, равновесиую температуру элемента массы. Подставляя это тождество в уравиение (9.50), интегрируя по замкнутому циклу н приравнивая интеграл от ds нулю, получаем для уравнения (9.49)

$$\Pi\langle d(\delta\Psi)/dt\rangle = \int\limits_M dm \oint [(T - T_0)/T](dq/dt)dt - \int dm T_0 \oint (d\sigma/dt)dt. \qquad (9.52)$$

Это и есть искомое обобщение результата Эддиигтона на иелинейный иеобратимый случай. Отметим, что, согласно этому уравиеиию, необратимые процессы всегда стремятся подавить пульсации, как и следовало ожидать. (См., например, [146, Ch. 27], где выполнено альтернативное рассмотренне эффектов вязкостн.)

В линейном и обратимом случае (когда $[T - T_0]/T = \delta T/T$, а $d\sigma = 0$) уравнеине (9.52) прнннмает вид

$$\Pi\langle d(\delta\Psi)/dt\rangle = \int\limits_M dm \oint (\delta T/T)\,\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)dt. \qquad (9.53)$$

Это и есть результат Эдднигтона.

Леду [335, §13] дал еще один вывод подобных выражений, который также приводит к формуле Эддингтона.

Легко показать, что уравнение (9.53) точно соответствует нашим результатам, полученным в предыдущих разделах этой главы при непосредствеином вычислении работы, совершаемой в течение цикла пульсаций силой гравитации и снлами, обусловленными наличием градиента давления, в предположеннн, что зтот цнкл замкнутый.

ГЛАВА 10
ПУЛЬСАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕАЛЬНЫХ ЗВЕЗД

В гл. 9 мы с весьма общей точки зрения рассмотрели влияние неадиабатнчности на радиальные пульсации звезд, а также термодинамические условия, которые приводят к звездным пульсациям. В результате выявился довольио очевидный факт: чтобы звезда была пульсационно неустойчивой, общее воздействне всех областей возбуждения пульсаций должно превышать в ней воздействне областей затухания. Этн выводы хорошо известны по меньшей мере с конца 30-х — начала 40-х годов, когда Эддингтон провел свои основополагающие исследования происхождения звездных пульсацнй. Однако лишь в последние 15 — 20 лет удалось выявить механизмы, ответствеиные за пульсации большннства видов переменных звезд. Теперь можно уверенно сказать, что мы довольно хорошо понимаем действне этих механнзмов и, следовательно, знаем прнчины пульсаций обычных тнпов переменных звезд. Хотя нужно уяснить еще много деталей, общая картина в основных чертах, по-видимому, верна.

В большинстве случаев эти механнзмы связаны с иоииизацией элемента с

высоким содержанием, такого, как водород или гелий, в оболочке звезды, на некоторой критической глубине под ее поверхностью. Точнее, главным фактором, ответственным за пульсации наиболее известных типов переменных звезд, является, вероятно, частичная ионизация He^+($He^+ \rightleftarrows He^{++}$, вторая ионизация гелия). Связь между содержанием гелия и неустойчивостью рассмотрена в работе [125]; см. разд. 10.3. Однако довольно значительный вклад в возникновение неустойчивости вносит и ионизация водорода, которая, возможно, является даже главной причиной неустойчивости красных переменных звезд. По современным представлениям, именно ионизацией водорода обусловлено в основном фазовое запаздывание изменений блеска пульсирующих звезд (гл. 11).

Термоядерные реакции, которые служат основным источником энергии на протяжении большей части жизни звезды, вероятно, играют незначительную роль в пульсациях самых известных типов переменных звезд, поскольку пульсации происходят в основном в оболочке звезды. Они практически не затрагивают более глубоких областей, где протекают термоядерные реакции, и поэтому прямое влияние последних пренебрежимо мало.

Эффекты обычной вязкости (молекулярной и лучистой), как установлено для случая радиальных пульсаций, также незначительны (см., например, [146, Ch. 27]).

В этой главе мы ограничимся кратким изложением основных идей, поскольку рассматриваемая тема довольно подробно обсуждена в различных обзорных статьях (например, [133]), где и можно найти дополнительные сведения.

Исследуя пульсации звезд типа δ Щита и β Цефея, Стеллингверф [549, 550] ввел новый вид механизма возбуждения в оболочке, который подробно обсуждается в разд. 10.1 и в гл. 13 (см. также [147, 152, 474, 475]).

В разд. 10.1 мы суммируем те важные принципы, на которых основано действие механизмов, связанных с ионизацией вещества в оболочке. Разд. 10.2 содержит краткий исторический очерк основных достижений, приведших к современным представлениям о звездных пульсациях. И наконец, в разд. 10.3 рассмотрено необходимое условие пульсационной неустойчивости, возникающей под действием механизмов, связанных с ионизацией вещества в оболочке.

10.1. Механизмы возбуждения пульсаций, связанные с ионизацией вещества в оболочке звезды

Действие механизмов возбуждения пульсаций, связанных с ионизацией вещества в оболочке звезды, обусловлено главным образом тем, что ионизация компонента звездного вещества с высоким содержанием может приводить к модуляции изменений потока энергии. Как отмечалось в гл. 9, модуляция должна быть такой, чтобы пульсирующие области накапливали, или поглощали, тепло в фазе наибольшего сжатия и теряли его в фазе наибольшего расширения. В этом случае давление в соответствующих областях звезды будет достигать максимума после максимума плотности. Тогда любые зарождающи-

еся пульсации будут усиливаться, т.е. будет иметь место эффект дестабилизации. Детальное рассмотрение показывает, что в тех областях, где элемент с высоким содержанием примерно наполовину ионизован, фазовые соотношения между изменениями потока и плотности могут быть именно такими, как описано выше. Кроме того, эти области частичной ионизации расположены во внешних слоях звезды, где пульсации имеют значительную амплитуду. Во внутренних же областях эффект обычно в точности противоположен описанному, поэтому здесь существует тенденция к подавлению любых зарождающихся пульсаций. Однако в этих внутренних областях амплитуда пульсаций относительно мала, так что эффект затухания ослаблен. Как показывают детальные расчеты, при подходящих условиях (см. ниже) эффекты возбуждения могут превысить эффекты затухания, и звезда может стать неустойчивой. Более того, объекты, в которых имеет место эта неустойчивость, должны располагаться именно в той части диаграммы Герцшпрунга — Рессела, где находятся основные типы переменных звезд.

Эффекты модуляции изменений потока можно выразить количественно, если записать интеграл работы (гл. 9) в следующем приближенном виде:

$$C \approx -L \int_M (\Gamma_3 - 1)\,(\delta\rho/\rho)\,[d(\delta L_r/L_r)/dm]dm, \tag{10.1}$$

где вариации $\delta\rho$ и δL_r — это только пространственные части соответствующих величин. В этом выражении мы пренебрегли источниками термоядерной энергии и приняли, что равновесное значение L_r постоянно по всей звезде и равно полной равновесной светимости L. Кроме того, мы предположили (а если не оговорено особо, то будем предполагать всюду в данном разделе), что величина $\delta\rho/\rho$ вещественна и положительна во всех интересующих нас областях. Физически это означает, что когда радиус звезды минимален, рассматриваемые области находятся в сжатом состоянии. Для пульсаций в основной моде такая ситуация будет существовать приблизительно по всей звезде, а для более высоких гармоник — в области, внешней по отношению к самому близкому к поверхности узлу колебаний. Только такие самые внешние области и заслуживают внимания при рассмотрении высоких гармоник, поскольку в слоях глубже самого внешнего узла амплитуда пульсаций обычно очень мала (п. 8.12в).

Для большинства звезд обычно $d(\delta L_r/L_r)/dm > 0$ во всей важной для рассматриваемой проблемы области. А тогда в соответствии с уравнением (10.1) $C < 0$, т.е. звезда пульсационно устойчива. В данном случае в момент, когда радиус минимален, изменения светимости всюду возрастают наружу. Поэтому в единицу времени через внешнюю границу каждого элементарного сферического слоя вещества вытекает большее количество тепла, чем поступает в слой через его внутреннюю границу, т.е. в этот момент каждый слой вещества теряет тепло. Тогда в соответствии с изложенным в гл. 9 каждый слой способствует затуханию. Следовательно, пульсации звезды являются затухающими. Такой вид затухания часто называют «затуханием вследствие излучения», хотя этот термин не следует относить только к лучистому пере-

носу, поскольку L_r — это локальная светнмость, обусловленная всеми возможнымн механнзмамн переноса энергин.

Такое поведенне светнмостн связано в основном с изменениямн непрозрачностн. Обычно прн сжатнн непрозрачность уменьшается, т.е. вещество становнтся более прозрачным, н это значительно усилнвает потерн тепла. Однако, как отметнл Эддннгтон [197, Ch. 8], некоторая утечка тепла проиcходила бы даже в том случае, еслн бы непрозрачость во время пульсацнй оставалась постоянной прн условии, что $\Gamma_1 \approx 5/3$. Последннй результат обусловлен главным образом тем, что измененне локальной светимостн пропорционально довольно высокой степенн температуры ($\propto T^4$), а температура прн сжатии обычно повышается. Вндно, что в этом случае быстрое возрастанне $\delta\rho/\rho$ наружу снльно способствует затуханню пульсаций. Прнведенные соображения показывают, что без некоторого эффектнвного дестабнлнзнрующего механнзма большннство звезд н, в частности, гнганты н сверхгиганты должны быть чрезвычайно устойчивы относнтельно пульсаций, как и следует из расчетов [128, 343, 448]. В определенном смысле этот результат является удовлетворнтельным: он согласуется с тем фактом, что пульсации звезд — очень редкое явленне (гл. 1).

Рассмотрим теперь, как влияют на нзменення светнмостн зоны нонизацин водорода H, нейтрального гелня He^0 и однократно ионнзованного гелня He^+, расположенные во внешннх слоях звезд. Для звезд с обычным химнческнм составом, в которых преобладают водород н гелнй, только этн зоны ионнзации н следует учнтывать. Однако нзлагаемые идеи применимы в прннципе к любому элементу с достаточно высоким содержаннем. Кроме того, здесь мы рассмотрим только лучистый перенос, хотя вещество в окрестности таких зон нонизации обычно конвективно неустойчиво.

В равновесном состояннн середина зоны нонизации He^+ всегда почтн независимо от основных параметров звезды имеет температуру около $4 \cdot 10^4$ K (что соответствует потенцналу ноннзацнн 54,4 эВ). Зоны нонизацин H и He^0 в звезде обычно так близкн друг к другу, что оказываемое ими влиянне почтн эквивалентно влиянию одной зоны, средняя часть которой имеет температуру от 10^4 до $1,5 \cdot 10^4$ K, также почтн не завнсящую от основных параметров звезды. Поскольку в поведении данной зоны преобладают эффекты ионнзации водорода, ее обычно называют просто зоной ноннзацин водорода.

Для рассматрнваемой проблемы наиболее важное влнянне подобной зоны ноннзацнн на свойства вещества заключается в том, что в ней $\Gamma_3 - 1$ довольно мало. В этом случае большая часть работы аднабатнческого сжатня переходит в энергию ноннзацни, а не в кинетнческую энергию теплового двнження, поэтому прн сжатнн температура возрастает не очень сильно. Малые значения $\Gamma_3 - 1$ в зоне ноннзации оказывают очень сильное влнянне на квазнаднабатические изменення светнмости $(\delta L_r/L_r)_a$, которые очень чувствнтельны к значениям $\Gamma_3 - 1$. Общнй эффект состонт в том, что $(\delta L_r/L_r)_a$ претерпевает в зоне ноннзацнн заметное уменьшение, сравннмое илн даже превышающее само значенне $(\delta L_r/L_r)_a$.

Снльное уменьшенне $(\delta L_r/L_r)_a$ в направленнн от центра во внутренних частях зоны ноннзацнн вследствие уменьшення $\Gamma_3 - 1$ ясно показывает [по

крайней мере, если $(\delta L_r/L_r)_a \approx \delta L_r/L_r$], что в этой области в момент максимального сжатия звезды имеет место поглощение энергии. Следовательно, данная область представляет собой область возбуждения (гл. 9).

С физической точки зрения малые значения $(\delta L_r/L_r)_a$ в области малых $\Gamma_3 - 1$ отчасти являются прямым следствием более слабых изменений температуры в этой области (т.е. меньших значений $\delta T/T$). Причина здесь в том, что для заданной непрозрачности $\varkappa$ светимость $L_r \propto T^4$. Следовательно, при сжатии поток излучения в рассматриваемой области возрастает меньше, чем в других частях звезды. Таким образом, в области, где $\Gamma_3 - 1$ убывает, поток излучения в момент наибольшего сжатия задерживается и поглощается веществом. Это поглощение энергии увеличивает темп локального возрастания температуры и приводит к тому, что во время последующего расширения температура, а следовательно, и давление оказываются несколько выше, чем в случае адиабатического движения. Как показано в разд. 9.1, именно избыток давления в фазе расширения обеспечивает преобразование некоторого количества поглощенного при сжатии тепла в механическую работу и тем самым в энергию пульсаций. Прямое влияние изменений температуры на изменения светимости получило название «γ-механизма» [143].

Если закон непрозрачности имеет вид $\varkappa \propto \rho^n T^{-s}$($n$ и $s > 0$), то ясно, что малые значения $\delta T/T$ в тех областях, где значения $\Gamma_3 - 1$ малы, могут приводить к возрастанию $\varkappa$ при сжатии, тогда как обычно $\varkappa$ при сжатии уменьшается (см. выше). Локальный рост $\varkappa$ при сжатии усиливает задержку потока излучения в области, где $\Gamma_3 - 1$ убывает в направлении от центра, и еще более способствует раскачке пульсаций в данной области. Это прямое воздействие изменений непрозрачности на изменения светимости Бейкер и Киппенхан [36] назвали «$\varkappa$-механизмом».

Отметим, что если s велико и отрицательно (а это, по-видимому, имеет место в зоне ионизации водорода), то поглощение излучения, а следовательно, и возбуждение пульсаций могут происходить даже в том случае, когда Γ_3 близко к своему обычному значению 5/3. Как показал Стеллингверф [549, 550] в своих расчетах пульсационной устойчивости моделей звезд типа δ Щита и β Цефея, иногда этот факт оказывается важным. В частности, при температуре около $1{,}5 \cdot 10^5$ К, при которой энергия фотонов в максимуме спектрального распределения энергии излучения близка к потенциалу второй ионизации гелия (54,4 эВ), отмечается некоторое увеличение непрозрачности. Вблизи этой температуры показатель s имеет более низкую абсолютную величину чем обычно, что и создает раскачивающий эффект. Стеллингверф назвал этот эффект «механизмом скачка непрозрачности».

Вернемся теперь к рассмотрению зоны ионизации элемента с высоким содержанием во внешних слоях. Зоны ионизации в звездах, как правило, довольно тонкие (по крайней мере, судя по изменениям равновесной температуры T), и $\Gamma_3 - 1$ быстро возрастает наружу во внешних частях такой зоны, где степень ионизации очень мала. (Минимум $\Gamma_3 - 1$ имеет место при температуре, соответствующей 50%-ной ионизации элемента.)

Аргументы, подобные изложенным выше, приводят к заключению, что величина $(\delta L_r/L_r)_a$ должна быстро возрастать наружу во внешних слоях зоны

ионизации (после столь же быстрого ее уменьшения во внутренних слоях), поэтому ее значения непосредственно выше и ниже этой зоны не очень сильно различаются между собой. Следовательно, если бы выполнялось соотношение $\delta L_r/L_r \approx (\delta L_r/L_r)_a$, то можно было бы ожидать, что сильное затухание во внешних частях зоны ионизации будет в значительной степени компенсировать сильное возбуждение во внутренних частях,и поэтому результирующее влияние зоны ионизации на устойчивость звезды будет малым или даже пренебрежимо малым. Однако из-за неадиабатических эффектов $\delta L_r/L_r$ и $(\delta L_r/L_r)_a$ могут весьма сильно различаться между собой в слоях, лежащих достаточно далеко от центра звезды. Именно отсутствие равенства этих двух величин (неадиабатический эффект) создает в звездах условия для возникновения пульсационной неустойчивости под действием механизмов, связанных с ионизацией вещества в оболочке.

Проще всего эти важные неадиабатичесие эффекты можно рассмотреть на примере переходной области, отделяющей квазиадиабитические недра от неадиабатических внешних слоев. В квазиадиабатических недрах справедливо квазиадиабатическое приближение, характеризуемое, например, соотношением $\delta T/T = (\Gamma_3 - 1)\delta\rho/\rho$, и там выполняется приближенное равенство $\delta L_r/L_r \approx (\delta L_r/L_r)_a$. С другой стороны, в неадиабатической внешней области вариации светимости фактически неизменны в пространстве, т.е. $(\delta L_r/L_r)_{sp} \approx \mathrm{const}$ (гл. 9), и практически никак не связаны с квазиадиабатическими изменениями светимости. (Следует, однако, отметить, что величина $(\delta L_r/L_r)_{sp}$ не строго постоянна в слоях выше переходной области, поскольку она может испытывать некоторое изменение в расположенной над этой областью зоне ионизации водорода; см. гл. 11.) Рассмотрение переходной области как отдельного слоя нулевой толщины является до некоторой степени чрезмерным упрощением, в действительности переходная область довольно протяженная.

С помощью уравнения энергии можно показать (см., например, [146, Ch. 27]), что положение переходной области в звездной оболочке определяется по порядку величины приближенным соотношением

$$\langle c_V T_{TR}\rangle(\Delta m)_{TR}/L\Pi \sim 1, \tag{10.2}$$

где L — равновесная светимость звезды, а Π — период пульсаций в рассматриваемой моде. Числитель приближенно равен полной внутренней энергии слоев, лежащих над переходной областью и имеющих массу $(\Delta m)_{TR} = M - m_{TR}$. Здесь T и c_V — соответственно локальные значения температуры и теплоемости на единицу массы при постоянном объеме в равновесной модели. Таким образом, переходная область определяет тот уровень, выше которого полная внутренняя энергия вещества по порядку величины равна полной энергии, излученной звездой в течение периода пульсаций. Отметим, что определение переходной области не преполагает никаких конкретных механизмов переноса энергии.

Для заданной равновесной модели звездной оболочки можно рассчитать зависимость $(\Delta m)_{TR}$ или T_{TR} (равновесной температуры в переходной области) от основных параметров звезды (такой расчет для упрощенной модели

оболочки представлены в ([146, Ch. 27]), из этих расчетов становятся очевидными два обстоятельства:

1. Положение переходной области в оболочке довольно сильно зависит от равновесного радиуса R и лишь слабо зависит от других параметров звезды, таких, как масса M и светимость L. Можно показать, что для лучистых моделей оболочек с одинаковыми светимостью L, массой M, химическим составом и для заданной моды пульсаций $T_{TR} \propto R^{-1/2}$, а $(\Delta m)_{TR} \propto R^2$. Следовательно, температура T_{TR} относительно велика в звездах с малым радиусом R и убывает при увеличении R. Другими словами, при увеличении радиуса переходная область перемещается по массовой координате наружу (см. ниже).

2. Оказывается, что для звезд в полосе неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рессела (рис. 3.1, на котором эта полоса изображена в виде узкой овальной области) $T_{TR} \approx 4 \cdot 10^4$ К, т.е. очень близка к температуре в зоне второй ионизации гелия. Это приближенное равенство двух температур наводит на мысль, что полоса неустойчивости соответствует приближенному совпадению переходной области и зоны второй ионизации гелия в звездной оболочке. Как показывают последующие рассуждения, такое совпадание является следствием взаимодействия неадиабатических эффектов с зонами ионизации.

Основные эффекты неадиабатичности во внешних слоях звезд состоят в нарушении приближенного равенства между действительными и квазиадиабатическими изменениями светимости $\delta L_r/L_r$ и $(\delta L_r/L_r)_a$ во внешних по отношению к переходной зоне областях. В этих областях изменения плотности и температуры подстраиваются друг к другу таким образом, что величина $\delta L_r/L_r$ остается приблизительно постоянной в пространстве. Поскольку степень ионизации сильно зависит от температуры, в зонах ионизации водорода и второй ионизации гелия температуры приблизительно постоянны и почти не зависят от основных параметров звезды. Поэтому можно рассмотреть звезду с заданными массой M, светимостью L и химическим составом, считая при этом равновесный радиус R свободным параметром. Такой подход позволяет приблизительно воспроизвести теоретическую эволюцию некоторых реальных звезд, когда они пересекают полосу неустойчивости.

Если радиус R настолько мал, что обе зоны ионизации лежат выше переходной области, то пространственные вариации светимости фактически неизменны, и поэтому величина $\delta L_r/L_r$ (вещественная часть величины $(\delta L_r/L_r)_{sp}$) здесь приблизительно постоянна, несмотря на заметное уменьшение $(\delta L_r/L_r)_a$ в этой области. Таким образом, $\delta L_r/L_r$ положительна и монотонно возрастает наружу до тех пор, пока не достигается переходная область, а выше ее остается по существу постоянной. Поэтому в оболочке происходит только затухание, и звезда устойчива.

Рассмотрим теперь случай несколько большего радиуса R. Поскольку температура T_{TR} с увеличением R уменьшается, а температуры в зонах ионизации приблизительно постоянны, существует критическое значение радиуса R_{crit}, при котором зона второй ионизации гелия (т.е. более глубокая из двух зон) приблизительно совпадает с переходной областью. В таком случае зона ионизации, по сути дела, разделяется на две части: квазиадиабатическую

внутреннюю часть и неадиабатические внешние слои. Внутренняя часть зоны ионизации лежит по существу в квазиадиабатических недрах, где $\delta L_r/L_r \approx (\delta L_r/L_r)_a$ и где уменьшение $\Gamma_3 \to 1$ наружу приводит к сильному уменьшению в этом же направлении $(\delta L_r/L_r)_a$, а потому и $\delta L_r/L_r$. Внешние части зоны ионизации, напротив, лежат по существу в неадиабатической области, где $\delta L_r/L_r$ мало и имеет всюду такое же значение как вблизи середины этой зоны. Следовательно, благодаря неадиабатическим эффектам сильного затухания во внешних частях зоны второй ионизации гелия теперь не происходит. Зона же ионизации водорода по-прежнему лежит в неадиабатической внешней области и поэтому оказывает лишь слабое влияние. Итак, сильное возбуждение, обусловленное тем, что во внутренних частях зоны второй ионизации гелия $\delta L_r/L_r$ быстро убывает наружу, теперь оказывается эффективным, и поэтому звезда может быть неустойчивой. Быстрый рост $\delta\rho/\rho$ наружу еще больше способствует возбуждению пульсаций в зоне второй ионизации гелия и выше нее по сравнению с затуханием в более глубоких областях [см., например, уравнение (10.1)]. Следовательно, этот рост $\delta\rho/\rho$ наружу, обычно оказывающий сильное стабилизирующее влияние, теперь усиливает неустойчивость. Таким образом, если бы имелась только зона второй ионизации гелия, то случай $R = R_{\mathrm{crit}}$ соответствовал бы максимальной неустойчивости при заданных светимости L, массе M и химическом составе. Низкотемпературная граница области неустойчивости, соответстующая $R > R_{\mathrm{crit}}$, будет рассмотрена ниже.

Детальные расчеты подтверждают (см., например, [36]), что в случае $R \approx R_{\mathrm{crit}}$ возбуждение во внешних областях оболочки действительно может превысить затухание в недрах,и поэтому звезда может стать неустойчивой.

Представленнные соображения позволяют объяснить уже упоминавшийся факт, что для звезд, лежащих в полосе неустойчивости на рис. 3.1, температура T_{TR} в переходной области близка к температуре в зоне второй ионизации гелия ($4 \cdot 10^4$ К). Условие, что переходная область и зона второй ионизации гелия приблизительно совпадают, может дать приближенное необходимое условие неустойчивости, обусловленной рассматриваемыми здесь механизмами (разд. 10.3).

Из наблюдений следует, что полоса неустойчивости цефеид довольно резко ограничена со стороны низких температур. При фиксированной средней светимости ширина полосы составляет $\Delta \lg T_e \approx 0{,}05 - 0{,}08$ (здесь T_e — эффективная температура), что соответствует $\Delta T_e \approx 600 - 1100$ К. К сожалению, рассматриваемые механизмы, связанные с ионизацией вещества в оболочке, которые могут объяснить высокотемпературную границу области неустойчивости, не способны на основе одного только лучистого переноса объяснить восстановление устойчивости при низких температурах. И действительно, детальные расчеты, как линейные, так и нелинейные (см., например, [300]), показывают, что при постоянной средней светимости неустойчивость в основной моде с понижением T_e продолжает усиливаться.

Такое нарастание неустойчивости в основной моде при увеличении радиуса R в значительной мере связано, вероятно, с зоной ионизации водорода, которая потенциально является областью очень сильного возбуждения (см. выше)

и при возрастанни радиуса R перемещается в звезде в иаправлеиии сблнжеиия с переходной областью.

Одиако хорошо известио, что современные теории конвекции предсказывают возинкновеине эффективного коивективиого переноса энергии во внешних слоях звезд с T_e, которые несколько ниже температур иа «голубой» (т.е. высокотемпературиой) границе области иеустойчивости. Поэтому, как впервые предположили Бейкер и Киппенхан [37], представляется почти несомненным, что именно эффективный конвективиый перенос приводит к восстановлению устойчивости при низких эффективных температурах и тем самым определяет положение «красной» (т.е. низкотемпературиой) границы полосы неустойчивости цефеид. Одиако из-за отсутствия иадежной теории неустановившейся конвекции (разд. 4.3 и 19.3) точные механизмы этого предполагаемого стабилизирующего воздействия еще очень плохо поняты.

К иастоящему времени, вероятио, иаиболее целеиаправленные попытки для решеиия этой проблемы предпринял Дюпри [173 — 182]. Его исследования довольно подробио описываются в разд. 19.3, где с физической точки зрения обсуждается, каким образом коивекция может подавлять иеустойчивость на «красной» границе полосы иеустойчивости. Бейкеру и Гафу в их теоретической работе [34] также удалось определить положеиие «красной» границы полосы иеустойчивости цефеид.

10.2. Краткий исторический очерк

Первым, кто внимательно исследовал проблему поддержания пульсаций и связанные с ней вопросы диссипации пульсациоиной энергии, был, по-видимому, Эддингтон [197]. Он получил выражение для полной диссипации пульсациоиной энергии в случае малых радиальных колебаний; это выражение и его вывод были приведены в разд. 9.4. Эддингтон использовал данное выражение для определения характерного времени τ_d затухаиия пульсаций в модели δ Цефея. Предполагая, что равиовесная модель может быть представлена политропой с показателем $n = 3$ (стаидартная модель Эддингтона), он получил $\tau_d \approx 8000$ лет. Поскольку это значение невелико по сравнению с характерным временем эволюции, вероятность наблюдеиия пульсаций такой звезды преиебрежимо мала. Последующие расчеты, основанные на более реалистичных моделях, показали, что τ_d еще в тысячу с лишним раз меньше оценки, полученной Эддингтоном. Эти результаты подчеркнули необходимость нахождения сильного и активного дестабилизирующего механизма поддержания пульсаций.

Эддингтои, несомненно, полагал, что основную роль в возбуждении пульсаций цефеид играют термоядерные реакции вблизи центра звезды. Однако он рассмотрел и другой возможный механизм возбуждения пульсаций, не связанный непосредствеино с ядерными реакциями. Как мы видели выше в настоящей главе, принцип работы этого механизма служит основой современных представлений о причинах большинства звездных пульсаций. Эддингтон называл этот механизм разновидностью клапанного механизма; его действие основано на модуляции потока тепла при прохождеиии слоев звезд-

ного вещества (см. выше). Эддингтон сравнивал свой клапанный механизм с термодинамической тепловой машиной, хотя, быть может, и довольно необычного по земным стандартам вида. Этот механизм обеспечивал желаемый эффект посредством изменения оттока тепла, тогда как в двигателе внутреннего сгорания изменяется поступление тепла. Если бы, например, в элементе вещества при сжатии отток тепла уменьшался, а при расширении увеличивался, то этот элемент способствовал бы возбуждению пульсаций (разд. 9.1).

В своих последних работах о причине неустойчивости пульсирующих звезд Эддингтон [199, 200] высказал предположение, что клапанный механизм действует в зоне ионизации водорода во внешних слоях звезд. По-видимому, он все еще полагал, что основной возбуждающий эффект обусловлен ядерными реакциями вблизи звездного центра, а клапанный механизм служит лишь для уменьшения диссипации энергии во внешних областях до такой степени, чтобы возбуждение под действием ядерных реакций преобладало над диссипацией и тем самым обеспечивало неустойчивость звезды.

Следующим важным шагом явилось выполненное Эпстейном [204] исследование решений линейного адиабатического волнового уравнения для моделей с сильной концентрацией вещества к центру (разд. 8.13). Амплитуды пульсаций в центральных областях таких моделей оказались приблизительно в 10^6 раз меньше, чем на поверхности. Основываясь на решениях Эпстейна, Кокс [128] провел затем детальный квазиадиабатический анализ устойчивости одной из этих моделей и нашел, что затухание вследствие излучения на много порядков превышает возбуждение, вызываемое ядерными реакциями. В результате был сделан общий вывод, что во внутренней области звезды, охватывающей около 0,85 звездного радиуса, не может быть никаких эффективных или важных источников неустойчивости, и поэтому механизм возбуждения пульсаций независимо от его природы должен находиться выше этой области. Подобные выводы были получены и в работах [343, 448].

Эти результаты заставили исследователей, пытавшихся определить положение источника неустойчивости в звезде, обратиться к внешним неадиабатическим областям (см., например, [129]). Почти одновременно с описанными исследованиями Жевакин [636 — 638] высказал предположение, что подходящим местом для работы клапанного механизма, рассмотренного Эддингтоном, может быть область второй ионизации гелия ($He^+ \rightleftarrows He^{++}$). Аналогичное предположение было сделано Коксом и Уитни [153]. В свете результатов, описанных в предыдущем разделе, возникновение неустойчивости обычно должно быть не частично, а целиком обусловлено действием клапанного механизма. Эффективность зоны второй ионизации гелия как механизма возбуждения пульсаций впервые была убедительно продемонстрирована с помощью линейных неадиабатических расчетов [36, 131]. С тех пор были проведены многочисленные детальные расчеты, как линейные, так и нелинейные (конкретные ссылки можно найти, например, в обзоре [133]), которые подтвердили эти выводы и почти не оставили сомнений в том, что зона второй ионизации гелия служит основным источником неустойчивости большинства

типов пульсирующих звезд, лежащих в полосе неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рессела (рис. 3.1).

Кристи [90] высказал предположение, подтвержденное затем Бейкером и Киппенханом [37], что в некоторых случаях важную роль в возбуждении пульсаций может играть ионизация водорода. Хотя последующие расчеты (ссылки см., например, в [133]) качественно подтвердили правильность такого предположения, тем не менее они показали, что для упомянутых типов пульсирующих звезд зона второй ионизации гелия остается главным источником возбуждения. (Однако ионизация водорода может служить основным дестабилизирующим фактором во многих красных переменных, см., например, [133, 296, 297, 324], а также работу [274], посвященную переменным типа Миры Кита.)

В статье Кинга и Кокса [299] можно найти дополнительную информацию о поисках дестабилизирующего механизма.

10.3. Необходимое условие возникновения неустойчивости и некоторые следствия

В настоящем разделе мы используем качественные соображения, приведенные в этой главе, для вывода по порядку величины необходимого условия пульсационной неустойчивости под действием ионизационных механизмов рассмотренного вида. Несмотря на то что это необходимое условие очень приближенное, оно все же полезно для общего понимания, а также позволяет исходя из простых рассуждений выявить ряд качественных особенностей, касающихся по крайней мере высокотемпературной границы области неустойчивости (рис. 3.1). Получаемые выводы подтверждаются детальными расчетами (см., например, [133]). Но, ограничиваясь анализом необходимого условия, нам вовсе не обязательно рассматривать только основную моду колебаний. Некоторые идеи, лежащие в основе вывода необходимого условия, были использованы при изучении различных типов звезд [147, 152].

В разд. 10.1 было показано, что возникновение неустойчивости на высокотемпературной границе области неустойчивости обусловлено перемещением переходной области в зону второй ионизации гелия, происходящим, когда при постоянных массе M и светимости L увеличивается равновесный радиус R, т.е. уменьшается средняя эффективная температура T_e. Хотя зона ионизации водорода, как отмечено выше, также способствует возбуждению пульсаций, основной вклад в этот процесс вносит обычно зона второй ионизации гелия. Этот результат частично объясняет малую ширину полосы неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рессела (рис. 3.1), поскольку на низкотемпературной границе неустойчивость подавляется (вероятно, из-за конвекции), прежде чем зона ионизации водорода станет доминирующим источником возбуждения. Следовательно, для простоты можно рассматривать только зону второй ионизации гелия, и мы часто будем называть ее «главной областью возбуждения». Таким образом, при выводе необходимого условия неустойчивости мы можем исходить из приближенного совпадения переходной области с зоной второй ионизации гелия в звездной оболочке (разд. 10.1).

Обозначая звездочкой величины в средней части этой зоны, имеем $T_{TR} \sim T^* \sim 4 \cdot 10^4$ К и $(\Delta m)_{TR} \sim \Delta m^*$, где Δm^* — масса, лежащая над зоной второй ионизации гелия. А тогда необходимое условие неустойчивости определяется соотношением (10.2), в котором сделаны соответствующие замены:

$$\langle c_V T^* \rangle \Delta m^* / L\Pi \sim 1. \tag{10.3}$$

Легко показать, что величина Δm^* сильно возрастает с увеличением R и гораздо менее чувствительна к другим звездным параметрам, таким, как L и M. Отсюда следует, что Δm^* сильно возрастает с уменьшением T_e. Поэтому в соответствии с выражением (10.3) области неустойчивости рассматриваемого вида будут иметь резкие границы со стороны высоких температур. Кроме того, из-за сильной зависимости левой части соотношения (10.3) от T_e эти высокотемпературные, или «голубые», границы будут на диаграмме Герцшпрунга — Рессела почти вертикальными, что и наблюдается.

Необходимое условие неустойчивости (10.3) можно представить и в другом виде. Делая простые предположения о строении оболочки, которая считается лучистой, используя соотношение период — средняя плотность и производя некоторые преобразования, можно показать [130], что вдоль голубой границы области неустойчивости выполняется следующее соотношение:

$$L \propto Q^{-w} Y^y Z^{-z} M^l T_e^{-x}, \tag{10.4}$$

где Q — пульсационная постоянная для рассматриваемой моды (разд. 8.6), Y — доля гелия по массе, а Z — доля по массе более тяжелых элементов. Все показатели w, y, z, l и x обычно положительны, и их значения определяются строением оболочки, зависимостью непрозрачности от температуры и плотности, а также другими факторами. Простая модель оболочки может дать приближенные значения показателей, но лучше определить их на основе детальных расчетов пульсаций. Здесь мы отметим только, что x довольно велико (≈ 10 — 20), а это подтверждает наши общие предположения о том, что голубая граница полосы неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рессела должна быть почти вертикальной.

Детальные расчеты пульсаций, как линейные, так и нелинейные (ссылки см., например, в [133]), подтверждают справедливость соотношения вида (10.4), по крайней мере вдоль ограниченных участков голубых границ, а также дают численные значения различных показателей. Типичные их значения таковы:

$$x \approx 10 - 20, \qquad l \approx 0{,}5 - 1,$$

$$z \approx (0{,}002 - 0{,}05)\,x, \qquad y \approx (0{,}05 - 0{,}2)\,x, \qquad w \approx (0{,}1 - 0{,}15)\,x. \tag{10.5}$$

Выражение (10.4) находит ряд непосредственных применений. Например, оно включает известное соотношение период — светимость для классических цефеид (разд. 3.1). Если выразить T_e через L и R, а R в свою очередь с помощью соотношения период — средняя плотность выразить через Π, M и Q, то для данного химического состава и данной моды пульсаций соотношение (10.4) дает связь между L, M и Π. А последующее использование соотношения масса — светимость $L = L(M)$ приводит к зависимости $L = L(\Pi)$, которая

схематично и представляет собой соотношение период — светимость. Типичные значения показателей (10.5) дают приблизительио правильный иаклон этой зависимости (см. также [130]). Таким образом, как светимость, так и период с перемещением вверх вдоль полосы иеустойчивости возрастают, поскольку обе величины зависят главиым образом от радиуса звезды, который в данном случае также увеличивается. Поэтому вполие поиятио, что для пульсирующих звезд в полосе неустойчивости должно существовать соотиошение между периодом и светимостью.

Вследствие конечной шириины полосы иеустойчнвости и по ряду других причин соотиошеиие период — светимость имеет разброс, достигающий $\sim 1^m$ при заданном периоде.

Кроме того, выражение (10.4) оказывается полезным для качествеиной оценки влияиия различных факторов на голубые границы полосы иеустойчивости. Например, при фиксированиой светимости L увеличение Y сдвигает голубую границу в сторону более высоких значений T_e, а увеличение Z — в стороиу более иизких T_e, однако зависимость от Z обычио довольно слабая. В тех областях, где примеиимо соотиошение (10.4), при переходе от иизших гармоиик к высшим (т.е. от более высоких значеиий Q к более низким) соответствующие голубые границы должиы лежать при все больших T_e. Так, согласио (10.4), голубая граница для первой гармоники должна лежать при более высоких T_e, чем для основной моды. Это предсказание не всегда выполняется (см., иапример, [582]), поскольку соотиошеиие (10.4) лишь иеобходимое, но не достаточное условие неустойчивости (см., иапример, [140]).

Зависимость положения голубых границ от Y и Z связана главным образом с иепрозрачностью. Например, увеличение Y означает уменьшеиие содержания водорода X, а водород служит обычио основиым источником непрозрачности. Поэтому вещество оболочки становится более прозрачиым и температура, характерная для зоиы второй иоиизации гелия ($\sim 4 \cdot 10^4$K), достигается при большем давлеиии, т.е. при большей массе Δm^* над этой зоной. Следовательно, чтобы левая часть (10.3) оставалась близкой к едииице, необходимо увеличить T_e. Аналогичиые рассуждения объясняют и зависимость от Z. Зависимость положения голубых границ от пульсациоииой постояниой Q обусловлена в основиом чувствительиостью выражения (10.3) к значению периода Π: чем меньше период (более высокая гармоиика), тем меньше Δm^*, а это в свою очередь дает более высокое значение T_e.

Представленная в (10.4) зависимость голубых границ иеустойчивости от массы объясняется более сложным образом, чем зависимость от других параметров, но и ее можно понять иа основе иеобходимого условия (10.3). Соответствующее доказательство, слишком громоздкое, чтобы приводить его здесь, можно найти в работе Кокса и Киига [150].

Следует предупредить, что рассуждеиия, касающиеся выводов из иеобходимого условия неустойчивости, являются иесколько упрощенными. Возможно, что такие усложняющие факторы, как кривизиа оболочки (см., иапример, [131]), влияиие коивекции на ее строение (иапример, [146, §27.7b]) и т.д., в ряде случаев измеияют иекоторые заключеиия, сделаииые иепосредственно на основе соотношения (10.3).

В работе [125] было показано, что если звезда имеет слишком низкое содержание гелия, скажем меньше 20% по массе, то она не будет пульсировать в полосе неустойчивости.

ГЛАВА 11
ФАЗОВОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ

В этой главе мы рассмотрим хорошо известную проблему фазового запаздывания для классических цефеид и звезд типа RR Лиры (разд. 3.1). Согласно обычной интерпретации результатов наблюдений, при пульсациях этих звезд светимость достигает максимума не в момент минимального радиуса, как можно было бы ожидать на основе применения теории адиабатических колебаний, а примерно через четверть периода после этого момента, т.е. приблизительно тогда, когда звезда быстрее всего расширяется. Такое отставание по времени и представляет собой «фазовое запаздывание».

Происхождение фазового запаздывания удалось довольно хорошо понять в последние годы: об этом более подробно будет рассказано в разд. 11.1. Разд. 11.2 посвящен в основном качественному рассмотрению теории, а разд. 11.3 — описанию некоторых количественных деталей. Наконец, в разд. 11.4 проводится сравнение с детальными расчетами и приведено несколько дополнительных замечаний.

Если не оговорено особо, то мы будем использовать здесь основные предположения, принятые в этой части книги (см., например, начало гл. 10).

11.1. Наблюдения и краткая история

Основной наблюдательный материал получают путем сопоставления кривых блеска и кривых лучевых скоростей пульсирующих звезд рассматриваемых типов. На рис. 3.2 уже были приведены такие кривые для δ Цефея — типичной классической цефеиды. Эти кривые наглядно демонстрируют фазовое запаздывание в указанном выше смысле.

Проблема фазового запаздывания привлекала внимание астрономов со времени первых тщательных наблюдений цефеид, т.е. примерно с 1915 г., и до недавнего времени ставила астрономов в тупик. Такие ученые, как Эддингтон, Росселанд, М.Шварцшильд и Мили, неоднократно пытались объяснить это явление (эти работы хорошо описаны в книге Росселанда [465]). Однако еще 10 — 15 лет назад все попытки оказывались безуспешными.

Линеаризованные расчеты в предположении лучистого переноса дают в зоне второй ионизации гелия фазовое запаздывание около 30 — 45°, обусловленное поглощением тепла в этой области при сжатии (качественное рассмотрение см. в разд. 9.1). Однако в ранних линеаризованных расчетах Кокса [131], в которых совершенно не учитывалась зона ионизации водорода, такое фазовое запаздывание сильно уменьшалось в области между зоной второй ионизации гелия и поверхностью звезды, поэтому на поверхности расчетное фазовое запаздывание светимости оказывалось очень малым, составляя лишь несколько градусов. С другой стороны, в линеаризованных расчетах

Бейкера и Киппеихана [37], где детальио рассматривались как зоиа второй ионизации гелия, так и зоиа иоиизации водорода, фазовое запаздывание получилось равиым около 180°. Поскольку лииеаризоваииые расчеты ие давали правильиого зиачеиия фазового запаздывания, исследователи пульсаций пришли к общему заключеиию, что этот эффект должеи быть иелииейиым.

Первое успешиое вычислеиие фазового запаздывания было выполиеио Кристи [91] при иелииейиых расчетах звездиых пульсаций иа ЭВМ (гл. 12). Впоследствии правильиое зиачеиие фазового запаздывания иезависимо получили Кастор [64] и Кокс и др. [145], примеиив до иекоторой степеии аналогичные методы. Одиако эти иелииейиые расчеты ие раскрыли физической причииы явлеиия. Кроме того, поскольку все расчеты были иелииейиыми, их успех еще более укрепил господствовавшее миеиие, что фазовое запаздываиие должио быть иелииейиым эффектом. (Одиако в одиой серии иелииейиых расчетов иа ЭВМ Кокса и др. [145] было установлеио, что величиия фазового запаздываиия сохраияется вплоть до иаимеиьших изучеииых амплитуд, соответствовавших полуамплитуде отиосительиых измеиеиий радиуса $|\delta R/R| \sim \sim 10^{-4}$. Этот результат порождал иекоторое сомиеиие отиосительио предполагаемой иелинейиости эффекта, но в то время ои ие был проанализирован до коица.)

В 1968 г. Кастор [66] предложил простое физическое объясиеиие природы фазового запаздывания, по крайией мере для перемеиных типа RR Лиры, а возможио и для классических цефеид. Позже ои подробио обосиовал [68] предположеиия, которые лежат в основе такого представлеиия. Согласио его теории, фазовое запаздывание — это в осиовиом лииейиое явлеиие (т.е. в точиой линейной теории оио должио иметь место), хотя и подверженное зиачительиому влияиию иелииейиых эффектов. Детальиые лииеаризоваииые расчеты (коикретиые ссылки см. в [133]) полностью подтвердили теорию Кастора. В разд. 11.4 мы более подробио проанализируем, почему лииеаризованиые расчеты Кокса [131] и Бейкера и Киппеихана [36, 37] ие смогли дать правильиое зиачеиие фазового запаздываиия.

Оставшаяся часть даииой главы будет посвящеиа в осиовном рассмотреиию теории Кастора. (В работе [299] представлено главным образом ее качествеииое изложеиие.)

11.2. Качественное рассмотрение наиболее общепринятой теории

Сущность упрощенной теории Кастора [66] заключается в том, что фазовое запаздывание в осиовиом обусловлеио перемещеиием при пульсациях звезды очеиь тоикой зоиы иоиизации водорода вглубь и иаружу по звездиому веществу. Оказывается, что для классических цефеид и перемеиных типа RR Лиры приблизительио в тот момеит, когда радиус звезды становится мииимальиым, в зоиу ионизации водорода поступает сиизу иаибольшее количество эиергии [иа уровие этой зоиы почти исчезает фазовое запаздывание, обусловлеииое зоиой второй ионизации гелия; см. замечаиия после уравиеиия (11.9)]. Сильиое возрастание потока энергии в осиовании зоиы иоиизации во-

дорода приводит к тому, что в ней очень быстро поглощается энергия. Поглощенная энергия ионизует водород во внутренних частях этой зоны, что приводит к еще большему перемещению зоны частичной ионизации наружу. Общий результат состоит в том, что приблизительно тогда, когда радиус звезды становится минимальным, зона ионизации водорода быстрее всего перемещается по звездному веществу наружу. Таким образом, в случае приблизительно синусоидальных пульсаций эта зона окажется ближе всего (по массе) к поверхности примерно через четверть периода после момента достижения минимального радиуса. Далее, легко показать (разд. 11.3), что при лучистом переносе светимость звезды, в частности, обратно пропорциональна некоторой степени массы, лежащей над зоной ионизации водорода. Поскольку эта масса будет наименьшей примерно через четверть периода после минимума звездного радиуса, приблизительно в этот момент светимость звезды будет наибольшей.

Важным, если не основным элементом теории Кастора является исключительно малая толщина зоны ионизации водорода в условиях лучистого равновесия. Это обусловлено тем, что для звезд, к которым применима рассматриваемая теория, скажем, для звезд с эффективной температурой $T_e \lesssim 7 \times 10^3 - 8 \cdot 10^3$ К, непрозрачность $\varkappa$ в зоне ионизации водорода и выше нее является сильно возрастающей функцией температуры T. В случае лучистого переноса такая зависимость $\varkappa$ от T приводит к чрезвычайно крутому температурному градиенту в пределах зоны ионизации водорода и непосредственно над ней. Как правило, температура может возрастать примерно от 8000 К непосредственно над этой зоной до 15000 К внутри зоны, причем на расстоянии, составляющем лишь $\approx 1/20$ локальной высоты однородной атмосферы. Таким образом, зона ионизации водорода ведет себя почти как разрыв и именно так ее и можно трактовать. Кроме того, масса, лежащая в каждый отдельный момент над зоной ионизации водорода, является вполне определенной величиной, которая уверенно вычисляется из теории лучистого переноса (разд. 11.3). Резкое возрастание температуры проиллюстрировано в [133, Fig. 20].

11.3. Дополнительные подробности упрощенной теории

Следуя Кастору [66], будем рассматривать зону ионизации водорода как некоторый «фронт» или разрыв. Пусть L_1 — количество энергии, поступающее в единицу времени в эту зону снизу. Будем считать, что из решения, полученного для внутренних слоев, мы знаем L_1 в зависимости от времени t, и для простоты предположим, что в течение цикла пульсаций L_1 имеет максимум при минимальном значении звездного радиуса R. Количество энергии, выходящее в единицу времени через верхнюю границу зоны ионизации водорода, обозначим L_2. Примем (см. разд. 9.1), что выше этой зоны величина L_2 остается неизменной в пространстве (но не во времени). Кроме того, будем предполагать, что во всех интересующих нас областях перенос энергии только лучистый.

Прежде всего мгновенную производную от полного давления P по массо-

вой переменной m с помощью уравнения импульса легко выразить через эффективное ускорение силы тяжести g_e, равное сумме обычного ускорения силы тяжести в поверхностных слоях и фактического мгновенного ускорения этих слоев при их движении. Строение областей выше зоны ионизации водорода легко определить из теории лучистого переноса. В приближении лучистой теплопроводности эта теория позволяет выразить мгновенную производную от локальной температуры T по переменной m через саму температуру T, количество выходящей энергии L_2 (предполагаемое постоянным в соответствующих областях), радиус r этих областей (принимаемый равным мгновенному радиусу звезды R) и непрозрачность $\varkappa$. Исключая из двух указанных выражений m, получим дифференциальное уравнение первого порядка для $\partial P/\partial T$, которое легко проинтегрировать, если представить $\varkappa$ в виде простой функции от P и T. Примем для $\varkappa$ следующее выражение:

$$\varkappa = \mathrm{const} \cdot P^n T^\sigma, \tag{11.1}$$

где типичные значения показателей степени в зоне ионизации водорода и выше нее заключены в пределах $1/2 \lesssim n \lesssim 1$, $4 \lesssim \sigma \lesssim 12$. Результат интегрирования показывает, что если $\sigma > 4$, а температура T по крайней мере в несколько раз выше температуры поверхности, то давление P становится почти постоянным в пространстве и равным давлению P_{H} в зоне ионизации водорода. Такое поведение давления P является следствием упомянутого очень крутого температурного градиента. Если выразить температуру поверхности через L_2 и R, то давление P_{H} можно представить в виде функции только от g_e, R и L_2:

$$P_{\mathrm{H}} \approx \mathrm{const}\, g_e^{1/(n+1)} R^{\sigma/[2(n+1)]} / L_2^{\sigma/4(n+1)} . \tag{11.2}$$

Однако P_{H} можно получить и посредством интегрирования уравнения импульса для заданного момента времени. Результат такого интегрирования дает P_{H} как функцию от g_e, R и Δm, где Δm — полное количество вещества, лежащее в данный момент над зоной ионизации водорода. Приравнивая оба выражения для P_{H} и разрешая относительно L_2, получаем

$$L_2 = \mathrm{const} R^{2(1 + 1/q)} / [g_e{}^{\beta} (\Delta m)^{1/q}], \tag{11.3}$$

где

$$q \equiv \sigma/[4(n + 1)], \tag{11.4}$$

$$\beta \equiv n/[q(n + 1)]. \tag{11.5}$$

Типичными значениями являются $q \approx 1 - 2$, $\beta \approx 1/2 - 1/6$. Кроме того, значение постоянной в уравнении (11.3) зависит от полной массы звезды M, а также от n и σ. Выражение (11.3) определяет излучаемое в единицу времени количество энергии L_2 как функцию R, g_e и Δm в соответствии с теорией лучистого переноса.

В рассматриваемой упрощенной теории нам осталось получить лишь выражение для скорости перемещения зоны ионизации водорода $dm/dt = -d(\Delta m)/dt$ при пульсациях звезды.

В методе Кастора [66] учтена чрезвычайно малая толщина зоны ионнзации водорода, что позволяет рассматрнвать эту зону как фронт нлн разрыв н примеиять для фронта соотношения тнпа соотношений Ранкина — Гюгонво. (Дальнейшее обсужденне этого подхода представлено в работе Адамса н Кастора [3].) Условия на фронте получают нз уравнення неразрывностн (4.4) н уравнення сохранения тепловой н механической энергни (4.26), запнсанных в консервативной форме. В системе коорднннат, движущейся вместе с фронтом, теченне предполагается стацнонарным. Обозначнм с помощью снмвола Δ скачкн соответствующих величин на фронте (т.е. разность между значениямн с внешней н внутренней границ фронта, где под внешней граннцей подразумевается обращеиная к поверхностн звезда). Если пренебречь силой тяготения н предположить отсутствне генерацин знергин в термоядерных реакциях, то нз упомянутых условнй на фронте можно получнть следующее соотношенне:

$$(dm/dt)\Delta(h + v^2/2) = -\Delta L. \tag{11.6}$$

Здесь L — полная локальная светнмость, $h = E + P/\rho$ — удельная энтальпня звездного вещества, а v — скорость двнжения фронта относнтельно вещества (предполагается, что двнженне фронта строго раднальное).

Далее, скачок велнчнны $(h + v^2/2)$ на фронте прнблнзнтельно равен энергин ноннзацни водорода на еднннцу массы, скажем χ, еслн вещество в рассматрнваемой областн состонт в основном нз водорода. Это утверждение прнблнженно подтверждается чнсленнымн оценками: еслн $v =$ 10 км/с (тнпнчное значенне), то $v^2/2 \approx 0{,}05 \cdot 10^{13}$ зрг/г, тогда как для чистого водорода $\chi \approx 1{,}3 \cdot 10^{13}$ зрг/г, поэтому обычно следует ожидать $\chi \gg v^2/2$. Кроме того, $\Delta h \approx \Delta E$($E$ — внутренняя энергия на еднннцу массы) $\approx \chi$. Таким образом, нз уравнения (11.6) получаем

$$dm/dt \approx (L_1 - L_2)/\chi, \tag{11.7}$$

где нндексы 1 и 2 указывают значення соответственно на внутренней н внешней граннцах фронта.

Уравненне (11.7) непосредственно устанавлнвает, что прн $L_1 > L_2$ зона ионнзацин водорода двнжется по звездному веществу наружу. Когда $L_1 > L_2$, в зоне пронсходнт поглощенне знергнн, которая расходуется на ноннзацню водорода, т.е. поглощенне энергнн заставляет зону ноннзацнн водорода перемещаться наружу.

Уравнения (11.3) н (11.7) являются ключевымн уравненнямн упрощенной теорнн Кастора [66]. Еслн выразнть велнчнну Δm нз уравнения (11.3) н подставнть в (11.7), то получнтся днфференцнальное уравненне первого порядка для светнмостн L_2 с внешней стороны от зоны ноннзацин водорода. Решенне этого уравнення дает L_2 как функцию временн t, раднуса звезды R, эффектнвного ускорения силы тяжестн g_e н светнмостн L_1 с внутренней стороны зоны ноннзацин. Однако,вместо того чтобы рассматрнвать общую нелннейную задачу, лучше сразу лннеарнзовать уравнення (11.3) н (11.7) отчастн для упрощення, а отчастн чтобы в явном виде показать, что фазовое запаздыванне действнтельно определяется в лннейной теорнн.

Итак, лниеаризуем уравнеиия (11.3) н (11.7) и исключнм нз полученных

уравнений производную dm/dt. Кроме того, заменим величину Δm на ее значение в равновесной модели, скажем Δm_0, и опустим индекс 0 при равновесных величинах. В результате получим линеаризованное дифференциальное уравнение для $(\delta L/L)_2$:

$$d(\delta L/L)_2/dt + (L_0/g\chi\Delta m_0)(\delta L/L)_2 = (L_0/q\chi\Delta m_0)/(\delta L/L)_1 + \\ + 2(1 + 1/q)\, d(\delta R/R)/dt - \beta d(\delta g_e/g_e)/dt, \qquad (11.8)$$

где величины β и q определяются выражениями (11.4) и (11.5).

Предположим теперь, что все пульсационные переменные зависят от времени по закону $\exp[i\sigma t]$, где $\sigma = 2\pi/\Pi$ предполагается чисто вещественным, а Π — период пульсаций. В этом случае легко получить соотношение между $\delta g_e/g_e$ и $\delta R/R$ с параметром Ω^2, где Ω — обычная безразмерная частота (см., например, разд. 8.6). Кроме того, примем, следуя Кастору, что

$$(\delta L/L)_1 = \alpha(\delta g_e/g_e), \qquad (11.9)$$

где коэффициент α — чисто вещественный. Это предположение эквивалентно пренебрежению малым запаздыванием величины $(\delta L/L)_1$ относительно минимума радиуса, возникающим в более глубокой зоне второй ионизации гелия (разд. 11.1). Для звезд интересующего нас типа характерное значение коэффициента α составляет около 1/2 [66].

Решение уравнения (11.8) можно записать в следующем виде:

$$(\delta L/L)_2 = -i(\delta L/L)_1(\Theta/q)\{1 + A + i[\Theta/q - A(\Theta/q)^{-1}]\}/[1 + (\Theta/q)^2], \qquad (11.10)$$

где

$$A \equiv (1/\alpha)[(1 + 1/q)/(1 + \Omega^2/2) + n/q(n + 1)], \qquad (11.11)$$

$$\Theta \equiv L_0/(\sigma\chi\Delta m_0). \qquad (11.12)$$

Итак, величина Θ равна отношению энергии, излученной звездой при ее равновесной светимости L_0 за время $\Pi/2\pi$, к энергии, необходимой для ионизации всего водорода выше зоны его частичной ионизации.

Из уравнения (11.10) следует, что при $\Theta/q \to \infty$

$$(\delta L/L)_2 \to (\delta L/L)_1. \qquad (11.13)$$

Следовательно, фазовое запаздывание величины $(\delta L/L)_2$ относительно $(\delta L/L)_1$, т.е. относительно минимума радиуса, стремится к нулю: мгновенная светимость звезды максимальна, когда радиус минимален. Поскольку $\Theta \propto$ $\propto (\Delta m_0)^{-1}$, описанный случай соответствует слишком малому значению Δm_0, т.е. выше зоны ионизации водорода так мало вещества, что даже в самой зоне вариации светимости оказываются неизменными в пространстве. Теплосодержание этой зоны и слоев, лежащих над ней, оказывается столь малым, что не может приводить к заметному различию между $(\delta L/L)_2$ и $(\delta L/L)_1$. Из уравнения (11.3) легко видеть, что при постоянных значениях L_0 и M и для типичных значений показателей степени в законе непрозрачности справедливо соотношение $\Delta m_0 \propto T_e^{-12}$, т.е. $\Theta \propto T_e^{12}$, где T_e — равновесная эффективная температура звезды. Следовательно, рассмотренный случай соответствует высоким T_e; в действительности этот случай реализуется лишь тог-

да, когда T_e настолько велико, что звезда на диаграмме Герцшпрунга — Рессела по всей вероятности, заметно смещена в сторону высоких температур от голубой границы области неустойчивости.

Рассмотрим теперь случай $\Theta/q \to 0$. Тогда из уравнения (11.10)

$$\delta(L/L)_2 \to -A(\delta L/L)_1, \tag{11.14}$$

что соответствует фазовому сдвигу $(\delta L/L)_2$ относительно $(\delta L/L)_1$ на $-180°$. Значит, максимум светимости L достигается в момент максимума радиуса R. Этот случай соответствует слишком большому значению Δm_0. Зона ионизации водорода расположена теперь так глубоко в звезде, что изменения Δm в течение периода оказываются относительно малыми и ими можно пренебречь. В данном случае $(\delta L/L)_2$ изменяется в противофазе с $(\delta L/L)_1$ и принимает наименьшее значение, когда $\delta g_e/g_e$ становится наибольшим. Зависимость $(\delta L/L)_2$ от $\delta g_e/g_e$ обусловлена в основном изменениями непрозрачности [уравнение (11.3)]. Однако при таком большом значении Δm_0 эффективная температура T_e столь мала, что звезда, вероятно, заметно смещена в сторону низких температур от обеих границ полосы неустойчивости, т.е. оказывается устойчивой.

Наконец, рассмотрим промежуточный случай, когда $\Theta/q \approx A^{1/2}$. В этом случае, согласно уравнению (11.10), имеем

$$(\delta L/L)_2 \approx -iA^{1/2}(\delta L/L)_1, \tag{11.15}$$

что соответствует запаздыванию $(\delta L/L)_2$ по фазе относительно $(\delta L/L)_1$ как раз на 90°: максимум светимости теперь достигается приблизительно через четверть периода после минимума радиуса. Условием такого фазового запаздывания на 90° служит равенство

$$\Theta/q = A^{1/2}. \tag{11.16}$$

При разумных значениях $\alpha = 1/2$ и $\Omega^2 = 10$ и для характерных значений показателей n и σ величина $A^{1/2}$ составляет от $\sim 0{,}91$ до $\sim 1{,}10$. Поэтому условие (11.16) для фазового запаздывания на 90° можно с достаточной точностью записать в виде

$$\Theta/q \approx 1. \tag{11.17}$$

В рассматриваемом случае величина Δm_0, как и T_e, принимает промежуточные значения; изменения величины Δm в течение периода теперь существенны, и все же зона ионизации водорода и слои над ней обладают достаточной теплоемкостью, чтобы эта зона приводила к заметному различию между $(\delta L/L)_1$ и $(\delta L/L)_2$. Можно показать, что величина $d(-\Delta m)/dt$ теперь приблизительно совпадает по фазе с $(\delta L/L)_1$. Таким образом, примерно в то время, когда $(\delta L/L)_2$ максимально, а радиус R минимален, зона ионизации водорода быстрее всего перемещается в звездном веществе по направлению к поверхности. Минимальное расстояние (по массе между зоной ионизации водорода и поверхностью), а следовательно, максимальная светимость достигаются приблизительно тогда, когда звезда быстрее всего расширяется, как это и следует из интерпретации наблюдений (разд. 3.1).

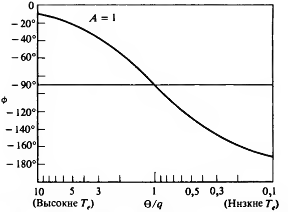


РИС. 11.1. Фазовое запаздывание ϕ в зависимости от Θ/q, рассчитанное с помощью уравнения (11.10) для случая $A = 1$. Дополнительные пояснения см. в тексте.

На рис. 11.1 нанесена фаза ϕ величины $(\delta L/L)_2$ относительно $(\Delta \dot{L}/L)_1$ в зависимости от Θ/q, т.е. фактически относительно минимума радиуса. Это фазовое запаздывание ϕ вычислено из уравнения (11.10) для случая $A = 1$. Видно, что ϕ изменяется от $\approx -35°$ для $\Theta/q = 3$ до $\approx -140°$ для $\Theta/q = 0{,}3$. Указанный диапазон значений Θ/q соответствует (при фиксированных L_0 и M) интервалу изменений эффективной температуры $|\Delta \lg T_e| \approx 0{,}08$, что для звезд в области неустойчивости на рис. 3.1 составляет $\Delta T_e \approx 1200$ К. Этот интервал изменений T_e лишь немного превышает эмпирическую ширину полосы неустойчивости цефеид.

11.4. Сравнение с детальными расчетами и дополнительные замечания

Детальные расчеты показывают, что для большинства цефеид и переменных типа RR Лиры Θ заключено в пределах от 0,5 до 5. Как раз в таком диапазоне значений фазовое запаздывание составляет около 90°. Примечательно, что как условие появления фазового запаздывания, так и необходимое условие неустойчивости (разд. 10.3) удовлетворяются при таких значениях параметров, которые соответствуют звездам, лежащим в области неустойчивости на рис. 3.1, в которую попадают многие известные типы пульсирующих звезд. Поскольку эти явления (неустойчивость и фазовое запаздывание) обусловлены действием двух различных зон ионизации, наличие фазового запаздывания в пульсирующих звездах кажется более или менее случайным. Очевидно, что объяснение обоих явлений одним физическим механизмом, как поступал Эддингтон [199, 200], оказывается не совсем правильным. Однако точка зрения Эддингтона отчасти оправдывается самим существованием фазового запаздывания, поскольку оно подразумевает, что заметная доля суммарного возбуждения должна быть связана с зоной ионизации водорода. Данное утверж-

дение основано на том, что если теплоемкость этой зоны ноннзацин достаточна, чтобы прнвестн к значнтельному разлнчню между $(\delta L/L)_1$ н $(\delta L/L)_2$, то зона должна вноснть существенный вклад в возбужденне пульсаций. Детальные расчеты, как линейные, так н нелнннейные, показывают, что это действнтельно нмеет место (конкретные ссылкн см., напрнмер, в [133]).

Используя результаты неопублнкованных лннеарнзованных расчетов Кокса н Кинга [149], Кокс [133] рассмотрел завнснмость ϕ от эффектнвной температуры для последовательностн моделей классныескнх цефенд прн фнкснрованных значениях L_0 и M (завнснмость представлена на рнс. 21 в [133]). Оказывается, что вблнзн голубых граннц неустойчнвостн фазовое запаздыванне ϕ близко к 90° как для основной моды, так н для первой гармоннкн; кроме того, нзмененне ϕ с T_e пронсходит в том же направленнн, что н в упрощенной теорни Кастора [66], н качественно согласуется с завнснмостью, показанной на рис. 11.1. Для лучнстых моделей переменных тнпа RR Лнры с помощью лннеарнзованных расчетов былн получены аналогнчные результаты [68, 281].

Кастор [66] представнл полуколичественные выводы о влняннн нелннейностн на фазовое запаздыванне. Он пришел к заключенню, что в шнроком днапазоне значенний параметров звезд совокупное действие нелннейных эффектов должно прнводнть к тому, что светнмость будет стремнться достичь максимума прнблнзнтельно в момент макснмума скоростн расшнрення поверхностн. Таким образом, нз-за нелинейных эффектов фактическое фазовое запаздыванне должно быть относнтельно нечувствнтельным к положенню пульсирующей звезды в пределах полосы неустойчивостн. Такое представление согласуется как с наблюденнями, так н с детальными нелинейными расчетамн.

Нелннейные расчеты [298] подтвердилн многне качественные выводы теорнн Кастора.

В работе [68] Кастор продолжнл рассмотренне влняння нелннейностн на поведенне зоны ноннзации водорода. Он показал, что, хотя в звезде, пульснрующей с малой, но конечной амплитудой, линеарнзованные уравнення могут серьезно нарушаться внутрн зоны ноннзацнн водорода, общее поведенне этой зоны опнсывается линеаризованными уравненнями примерно с такой же точностью, как н другне пульсационные переменные. Некоторую аналогию представляет нспользованне соотношенний Ранкина — Гюгоньо для ударной волны; такой метод дает точные соотношения между условнями на значнтельном расстояннн перед фронтом н за фронтом, хотя условня внутрн фронта ударной волны опнсываются неточно. Этот результат служнт дополннтельным обоснованнем для нспользовання лннейной теорнн прн опнсаннн фазового запаздывання.

Карп [292] отметил, что в его нелннейных расчетах пульсацнй цефеид фазовое запаздывание, по-виднмому, больше связано с зоной второй ноннзацин гелня, чем с зоной ноннзацнн водорода. В настоящее время неясно, как соотнестн этот результат с теорией Кастора.

Кастор [68] подчеркнул также, что еслн бы в зоне ионизации водорода н выше нее важное значенне нмел конвектнвный перенос энергнн, то фазовое запаздыванне оказалось бы слншком большнм — около 180°. Этот вывод со-

гласуется с более раниими лииеаризованиыми расчетами Бейкера и Киппенхана [37], получившими фазовое запаздыванне почти 180° для модели, которая в равиовесиом состояиии имела во виешних слоях эффективиую конвекцию. Аналогичные качествениые выводы были сделаны Ибеном [281]. С фнзической точкн зреиия, этот результат обусловлеи тем, что для звезды с задаииыми зиачеииями L_0, M н T_e конвекцня в равиовесной моделн прнводнт к увелнченню массы Δm_0 над зоной иоиизацин водорода, а также к увеличеиию массы самой зоиы. Следовательио, конвекция приводнт к тому, что звезда оказывается ближе к рассмотренному выше пределу $\Theta/q \to 0$, который соответствует фазовому запаздываиию $\phi \to 180°$. По мнеиию Кастора, фазовое запаздывание, иаблюдаемое в реальиых пульсирующих звездах, свидетельствует о том, что конвекция менее эффективиа, чем предсказывается обычными теориями коивекции.

Как показывают двумериые расчеты коивекции в пульсирующих звездах, выполиеииые Дюпри [179], чтобы пульсирующая звезда стала устойчивой, достаточио такой слабой коивекции, что оиа ие должиа оказывать заметиого влияиия на фазовое запаздывание.

Наконец, линеаризованиые расчеты Кокса [131] ие дали правильиого зиачеиия фазового запаздывания, очевндио, потому, что в ннх нз практических соображеиий совершеиио ие учитывалась зоиа иоиизацин водорода.

ГЛАВА 12

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

На пульсациях реальиых звезд, иесомнеиио, должны сказываться иелинейиые эффекты, которые, вероятио, нельзя иепосредственно опнсать с помощью лииейиой теории. Кокс [133] представил ряд коикретиых свидетельств существования такнх эффектов в природе. Ои показал, например, что если осиовываться иа поверхиостиых амплитудах пульсаций, определяемых из наблюдений, то отиоснтельные измеиения давлеиия, плотности н температуры иа поверхности оказываются слишком большими для того, чтобы их можно было правильно предсказать посредством лииейиой теории. Кроме того, даже для отдельиой моды кривые блеска н лучевых скоростей обычно не являются простымн сниусоидами (см., иапример, рис. 3.2). Накоиец, тот факт, что амплитуды иаблюдаемых пульсаций перемеииых звезд одиого н того же типа обычно ие показывают чрезмериых вариаций от звезды к звезде, иаводнт иа мысль о существоваиии иелинейного установившегося режима колебаний типа предельиого цнкла.

Однако полиая система иелииейиых уравиеиий иастолько сложиа, что, повидимому, ии для каких реалистичиых звездиых моделей ее иевозможио решить аналнтнчески. Исключеиие могут представлять лишь два частиых (и не очеиь реалистичиых) случая, которые кратко рассматриваются в разд. 12.1. Кроме того, по-видимому, не существует математических методов, которые были бы особеиио удобны при изучеиии иелииейиых колебаиий. Поэтому большиииство иедавиих теоретических исследований звездных пульсаций целиком базнровалось на числеиных методах с нспользоваиием быстродейству-

ющих ЭВМ, как кратко описывается в разд. 12.2. Однако за последнее время было сделано несколько новых попыток применения аналитических методов, и эти попытки перечислены в разд. 12.3.

Если не оговорено особо, то в настоящей главе мы будем исходить из тех же основных предположений, что и в остальных главах части II книги (см., например, вводные замечания к гл. 10).

12.1. Точно интегрируемые случаи

Точно интегрируемых случаев всего два,и оба они относятся к адиабатическому движению при постоянном показателе адиабаты $\Gamma_1 = (d \ln P/d \ln \rho)_{ad}$. Эти случаи — звездная модель общего вида с $\Gamma_1 = 4/3$ и однородная модель (во всех точках которой плотность ρ одинакова) с произвольным, но постоянным значением $\Gamma_1 > 4/3$. Таким образом, мы рассматриваем здесь радиальные нелинейные адиабатические пульсации звездной модели с постоянным Γ_1.

Уравнение движения — это уравнение (6.11), в котором функция $f(m, t) = -Gm/r^2$, где m — масса, заключенная внутри сферы радиусом r. Если использовать уравнение неразрывности [например, (6.8)] и принять, что колебания адиабатические, то ускорение $\ddot r$ элемента массы можно выразить через r, r_0 (значение r для того же самого элемента массы в непульсирующей модели), m и Γ_1. Предположим теперь, что переменные разделяются:

$$r(r_0, t) = x(r_0)w(t), \qquad (12.1)$$

где $x(r_0)$ — функция только r_0, а $w(t)$ — функция только времени t. Подставляя это выражение в уравнение для $\ddot r$, после некоторых преобразований получим

$$w^2\ddot{w} = -\frac{x(r_0)}{r_0^2}\,\frac{1}{w^{3\Gamma_1-4}}\,\frac{1}{\rho_0}\,\frac{d}{dr_0}\left\{P_0\left[\frac{r_0^2}{x^2(r_0)}\,\frac{1}{dx(r_0)/dr_0}\right]^{\Gamma_1}\right\} - \frac{Gm}{x^3(r_0)}, \qquad (12.2)$$

где величины с индексом 0 являются функциями только r_0.

Для модели общего вида с $\Gamma_1 = 4/3$ мы сразу видим, что правая часть уравнения (12.2) является функцией только r_0, а левая — функцией t. Следовательно, в данном случае возможно разделение переменных, и обе части уравнения (12.2) равны одной и той же постоянной, скажем A. Вероятно, простейший способ удовлетворить этому требованию — положить $x(r_0) = r_0$. Такое условие в свою очередь налагает требование $A = 0$, поскольку невозмущенная модель находится в гидростатическом равновесии. Поэтому мы получаем

$$w = Bt + C, \qquad (12.3)$$

где B и C — постоянные интегрирования.

Таким образом, в этом случае решение (при надлежащем выборе постоянных) имеет следующий вид:

$$r = r_0(t/t_0), \qquad (12.4)$$

где $r \propto t$, причем $\ddot{r} = 0$ (гидростатическое равновесие). Из уравиения неразрывности получаем

$$\rho/\rho_0 = (t/t_0)^{-3} = (r/r_0)^{-3}, \tag{12.5}$$

а из уравнения импульса —

$$P/P_0 = (t/t_0)^{-4} = (r/r_0)^{-4}. \tag{12.6}$$

Но уравнения (12.4) — (12.6) — это уравнения гомологического движения прн наличии гидростатического равновесия. Следовательно, можио сделать вывод, что *произвольная звездная модель с* $\Gamma_1 = 4/3$ *при адиабатическом движении находится в состоянии безразличного равновесия* и при любом значении радиуса может быть гидростатически равновесной.

Что касается второго точно интегрируемого случая, то в нем предполагается, что величина Γ_1 постоянна и не равна $4/3$. Тогда, чтобы можно было разделить переменные, в невозмущенной модели должно выполняться соотношение $x \propto m^{1/3}$, как это можно получить из уравнения (12.2). Отсюда следует, что

$$P_0/\rho_0^{\Gamma_1} = Bm^{2/3} + C, \tag{12.7}$$

где B и C — постоянные. Однако реалистичные звездные модели не подчиняются уравнению (12.7), и для них разделение перемениых оказывается невозможным. Но это уравнение точно выполияется для однородной модели в гидростатическом равновесии. Поэтому для такой модели переменные разделяются,и для нее в случае радиальных нелинейных адиабатических пульсаций с Γ_1 = const может быть получено точное решение. Описанный случай совершенно нереалистичный, но зато поучительный. Он довольно подробио рассмотрен Коксом [133] и Леду и Вальравеном [345, § 85], и поэтому здесь мы больше не будем на нем останавливаться. Отметим лишь, что проведенный для этой модели анализ показывает возможность существования осциллнрующих решений только при $\Gamma_1 > 4/3$, точно так же как и в линейном случае (разд. 8.1).

12.2. Численные методы

Поскольку для пульсаций реалистнчных звездных моделей в общем случае нельзя получить аналитических решений, то естествеино, следует обратиться к численным методам. Два подхода были испытаны и иашли применение в прошлом: а) решение задач с начальиыми данными и б) поиск периодических решений нелинейных уравнений. Метод (б) является очень перспективным и уже дал ряд предварительных результатов (см. ниже), но он все еще иаходится до некоторой степени в стадии разработки. К настоящему времени довольно много расчетов было проведено с помощью метода (а), и поэтому большинство наших замечаний будет касаться зтого подхода.

Методы численного решения задач с начальными данными основываются на разбиении звезды или ее оболочки на ряд дискретных сферических массовых зон или слоев (приблизительно на 50) и в использовании вместо уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла конечно-разностных уравнений,

составленных, например, по рекомендациям книги Рихтмайера и Мортона [452]. Затем при определенных начальных условиях рассчитываемая модель звезды шаг за шагом прослеживается во времени на быстродействующей ЭВМ. Кристи [90], Кокс и др. [142] и Алешин [14] первыми опубликовали результаты подобных расчетов. Более детальное описание таких методов можно найти в работах [91, 117, 143, 552 — 554]. Дальнейшее обсуждение и развитие этого подхода представлено, например, в работах [224, 320, 417]; см. также [4, 70, 161]. Некоторые результаты применения указанных методов, а также многочисленные ссылки приведены в [121, 133, 214].

При достаточном машинном времени такие методы позволяют для реалистичных моделей исследовать нарастание или затухание пульсаций, переход от малых амплитуд к большим, установление предельной амплитуды и ее характеристики, поведение моды колебаний и т.д. Эти расчеты подтвердили результаты расчетов с помощью линеаризованных уравнений и явились их дальнейшим развитием, они решили некоторые проблемы, касающиеся наблюдаемых пульсирующих звезд, но и поставили новые вопросы. Подобные расчеты, по крайней мере на современной стадии их развития, требуют определенной доли мастерства, и разные исследователи разрабатывают детальные методы для выполнения той или иной части расчетов. Трудности несколько уменьшились после проведенного в работе [214] сравнения результатов, полученных различными исследователями для одной модели. Оказалось, что результаты согласуются между собой. Поэтому можно сделать вывод, что в таких расчетах по крайней мере приближенно воспроизводится поведение реальных звезд с течением времени.

В последние годы некоторые усилия были затрачены на то, чтобы более или менее непосредственно получить периодические решения нелинейных уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла. Эти усилия были в значительной степени стимулированы желанием обойти многочисленные трудности, присущие методу начальных данных (например, чрезвычайно большие затраты машинного времени со всеми сопутствующими неудобствами).

Первые попытки были сделаны Бейкером и фон Зенгбушем [38, 39, 611] (см. также [32]). В их методе разбиение модели на зоны, конечно-разностное представление уравнений, введение искусственной вязкости и т.д. очень сходны с использованными в методе начальных данных. При численном решении задач с начальными данными система конечно-разностных уравнений, аппроксимирующая четыре основных уравнения (неразрывности, импульса, энергии и потока энергии) решается методом итераций относительно четырех физических переменных (скажем, r_i, $\dot{r}_i$, $T_{i-1/2}$ и $V_{i-1/2}$) в каждой из зон (число которых равно, например, J) и для каждого шага по времени. Таким образом с учетом граничных условий для каждого шага по времени решаются $4J$ связанных между собой нелинейных уравнений для $4J$ неизвестных.. Если один период содержит K шагов по вермени (рассмотрение критериев выбора K см.,например,в [117]), то полное число уравнений и неизвестных, которые следует решить для одного периода, равно $4JK$ (что в типичных случаях может составлять около 40 000 — 50 000). Метод поиска периодических решений нелинейных уравнений включает те же $4JK$ неизвестных, но теперь есть

еще 4 J дополиительиых иензвестных, так как зиачеиия величии в иачале пернода *a priori* ие нзвестны. Поскольку период П не определеи заранее, его также следует включить в чнсло неизвестиых. Итак, всего имеется $4J(K+1)+1$ неизвестиое, 4 JK уравненнй и 4 J пернодическнх граничных условнй. В рассматриваемом методе все иеизвестиые для одного периода определяются по сутн дела одновремеино с помощью некоторой усложиеиной разиовидностн схемы Ньютоиа — Рафсоиа. Условие пернодичности приводит к тому, что значеине периода П оказывается собствеииым значеиием системы иелииейиых уравиеиий и его определенне является частью решеиия всей задачн. Эти периодическне решеиия могут опнсывать ие только осиовную, ио и более высокне моды. Кроме пернодического нелииейиого поведения модели метод дает также ииформацию об устойчивости нелииейиых предельиых циклов и в общем представляется очень перспективным.

Позднее Стеллннгверф [546 — 548] разработал метод, который достнгает тех же целей, что и метод Бейкера — фон Зеигбуша, ио является комбинацией описаниых обоих подходов. В этом методе для некоторого иачального момеита времеин задают пробиые зиачения всех завнсимых физнческих переменных, а также значение самого периода и выбнрают чнсло шагов по времени для одиого периода. Затем с помощью метода иачальиых даниых (или какой-лнбо его разиовидиости) проводят интегрирование модели иа выбраиное число шагов по времеии. Полученные в коице периода зиачеиия физических переменных сравнивают с иачальными зиачениями, а затем с помощью метода итераций варьируют эти иачальиые зиачения и сам пернод до тех пор, пока ие достигается строгая периодичиость. Как и в методе Бейкера — фои Зенгбуша, этот метод дает полную информацию о иелинейных предельиых циклах для различиых мод колебаний.

Указанные методы, по-вндимому, являются едииствеииыми возможиыми методами изучеиия устаиовнвшегося режима колебаний для звездных моделей с очень большими характерными временами иарастания или затухания пульсаций, очень медлеииым темпом перехода от одной моды колебаний к другой н т.д. В работе [135] подытожены иекоторые предварительные результаты, получениые этими методами. Их дальнейшим исследованием и развитием занимается А. Кокс с сотрудниками (см., например, [123]). Бачлер [57] использовал иовый подход, осиоваииый иа методе двухмасштабиых разложеиий (см., иапример, [107]), который представляется очень миогообещающим.

12.3. Аналитические методы

В ряде специальных случаев были сделаиы многочисленные попытки получить нелинейиые решения путем разложения по линейиым адиабатическим собственным функциям или другими способами, ио в этой книге мы их рассматривать ие будем. Краткое изложеине некоторых результатов, а также ссылки на более ранние исследоваиия в даииой области можно найти в работе Леду и Вальравеиа [345, §86 — 90] и в книге Росселанда [465, гл. 7]. Более поздние результаты представлены в статьях [369, 377, 389, 390, 416, 512 — 515, 517, 520, 597 — 600].

ГЛАВА 13
ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ЗВЕЗДНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Ясно, что неадиабатические (т.е. реальные) звездные пульсации — сложное явление. Это верно даже при очень малых амплитудах, когда применима линейная теория, а также в случае чисто радиальных колебаний. При больших амплитудах, когда важны нелинейные эффекты, ситуация оказывается почти безнадежно запутанной. По этим причинам был предпринят ряд попыток разработать такие модели звездных пульсаций, которые были бы достаточно просты, чтобы их можно было понять на основе привычных физических представлений, но при этом сохраняли бы физическую суть явления. Большинство попыток было основано на модели «однозонного» типа, которую можно представить как сферический концентрический слой вещества (возможно, относительно тонкий), расположенный внутри звезды. Пожалуй, самой первой и наиболее известной из таких моделей является «однозонная модель Бейкера» [31]*, довольно подробно описываемая в разд. 13.1. Эта модель предназначалась главным образом для анализа очень малых радиальных пульсаций, т.е. для объяснения нескольких сложных физических явлений, лежащих в основе пульсаций, описываемых линейной теорией. Модель привлекла внимание и была обобщена на случаи, которые не исследовались в оригинальной статье Бейкера [244, 284, 399, 589, 633]. Здесь мы не будем подробно останавливаться на этих обобщениях. Кроме того, если не оговорено особо, мы будем рассматривать только радиальные колебания.

Мур и Спигел [385] изучили линейные и нелинейные колебания осциллятора с тепловым возбуждением, который по предположению моделировал поведение конвективного элемента в стратифицированной оболочке звезды. Хотя эта модель не предназначалась для непосредственного применения к пульсирующим звездам, тем не менее некоторые решения поразительно напоминают поведение во времени определенных типов реальных пульсирующих звезд.

Ашер и Уитни [596] обсудили колебания однозонной модели, которая во многих отношениях сходна с однозонной моделью Бейкера. Они рассмотрели как линейные, так и нелинейные колебания, причем последние исследовались главным образом с помощью асимптотического метода с сохранением нелинейных членов только первого порядка по малому параметру. Данную модель, как и модель Мура и Спигела [385], мы здесь подробно рассматривать не будем.

Радд и Розенберг [470] предложили модель, специально предназначенную для исследования нелинейных неадиабатических пульсаций. Эта модель, по существу, также является однозонной, и ей посвящен разд. 13.2.

Стеллингверф [545] разработал однозонную модель, которая предназначена главным образом для изучения изменений выходящего потока излучения

---

* С. А. Жевакин также использовал в своих исследованиях однозонную модель (Астрон. ж. 31, 141, 1954). — *Прим. ред.*

как в линейной, так и в нелинейной теории. Модель является обобщением однозонной модели Бейкера и рассматривается в разд. 13.3.

Наконец, в разд. 13.4 описывается модель, разработанная для выяснения некоторых особенностей установления предельной амплитуды, анализа устойчивости предельных циклов и т.д. Эта модель предложена Кастором [67] и приводится здесь с его любезного согласия.

Все эти модели способствовали выяснению ряда сложных физических вопросов, связанных со звездными пульсациями, и пониманию роли различных физических механизмов, определяющих или затрагивающих некоторые аспекты этого явления. Однако вряд ли можно сомневаться, что реальные пульсирующие звезды устроены значительно сложнее применяемых для их описания однозонных моделей. Например, решающую роль в пульсациях может играть стратификация реальных звездных оболочек (т.е. изменение основных характеристик в пространстве), что в однозонных моделях учитывается лишь частично (если вообще учитывается). Упрощенные модели стратифицированных звездных оболочек, вне всякого сомнения, оказались бы полезными для более глубокого понимания физики звездных пульсаций.

13.1. Однозонная модель Бейкера

В этом разделе мы рассмотрим однозонную модель Бейкера [31] только в рамках линейной теории и для чисто радиальных колебаний. Нелинейные колебания обобщенной модели будут кратко описаны в разд. 13.3.

Можно отметить, что линеаризованный подход Джинса [287], основанный на предположении о гомологическом движении слоев вещества (когда $\delta r/r = \mathrm{const}$ в пространстве), приводит к тем же результатам, что и однозонная модель Бейкера в линейной теории.

В модели Бейкера рассматривается расположенный внутри звезды отдельный сферический слой массой Δm. В этом слое вариации всех физических переменных (за исключением вариации светимости, см. ниже) предполагаются постоянными в пространстве. Затем основные уравнения линеаризуются (гл. 5 и 7) и отбрасываются все пространственные производные, за исключением $\partial(\delta L_r/L_r)/\partial m$ ($\delta L_r/L_r$ — относительная вариация светимости). Поскольку Бейкер намеревался использовать свою однозонную модель главным образом для изучения обычных типов пульсирующих звезд, в которых роль источников ядерной энергии незначительна (гл. 10), он исключил эти источники из своей модели. Однако при $\varepsilon = 0$ (ε — скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы) нельзя отбрасывать член $\partial(\delta L_r/L_r)/\partial m$, иначе полностью исчезают физические предпосылки возбуждения пульсаций.

В модели Бейкера этот член учитывается следующим образом. Количество энергии, поступающее в единицу времени на внутреннюю границу зоны, предполагается постоянным и равным локальной равновесной светимости; следовательно, на этой границе $\delta L_r/L_r = 0$. Однако на внешней границе допускается, чтобы соответствующая величина — обозначим ее $(\delta L_r/L_r)_U$ — изменялась с течением времени, позволяя этой зоне получать или терять тепло посредством модуляции проходящего через нее потока энергии. Кроме того,

$\delta L_r/L_r$ внутри зоны принимается равным ½ $(\delta L_r/L_r)_U$, т.е. мгновенному среднему от значений $\delta L_r/L_r$ на обеих границах. Замена $\partial(\delta L_r/L_r)/\partial m$ на $(\delta L_r/L_r)_U/\Delta m$ приводит к следующему приближению:

$$\partial(\delta L_r/L_r)/\partial m = 2(\delta L_r/L_r)/\Delta m. \tag{13.1}$$

Бейкер рассматривает только лучистый перенос и считает, что вариация непрозрачности $\delta\varkappa/\varkappa$ определяется (в наших обозначениях) выражением

$$\delta\varkappa/\varkappa = n\,\delta\rho/\rho - s\delta T/T, \tag{13.2}$$

где $\delta\rho/\rho$ и $\delta T/T$ — относительные вариации соответственно плотности и температуры, а n и s — постоянные. Линеаризованное уравнение состояния записывается в виде

$$\delta P/P = \chi_\rho \delta\rho/\rho + \chi_T \delta T/T, \tag{13.3}$$

где $\delta P/P$ — относительная вариация давления, а χ_ρ и χ_T — постоянные (разд. 4.2в).

Поскольку все пространственные производные при этом исключаются, уравнения пульсаций образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка по времени. Объединяя их в одно дифференциальное уравнение и предполагая, что зависимость всех пульсационных переменных от времени имеет вид e^{st}, получаем кубическое уравнение для собственной частоты

$$s^3 + K\sigma_0 A s^2 + B\sigma_0^2 s + K\sigma_0^3 D = 0, \tag{13.4}$$

где

$$A \equiv (\Gamma_3 - 1)(s + 4)/\chi_\rho, \tag{13.5}$$

$$B \equiv 3\Gamma_1 - 4, \tag{13.6}$$

$$D \equiv (\Gamma_3 - 1)[3n\chi_T - s(4 - 3\chi_\rho) + 4(\chi_T + 3\chi_\rho - 4)]/\chi_\rho, \tag{13.7}$$

а величины Γ_1 и Γ_3 определены в разд. 4.2. Величины σ_0 и K определяются следующим образом:

$$\sigma_0^2 \equiv g/r = Gm/r^3, \tag{13.8}$$

$$K = [\chi_\rho/(\Gamma_3 - 1)]2L/\Delta m c_V T\sigma_0, \tag{13.9}$$

где g, m, r, L, c_V и T — соответственно локальное ускорение силы тяжести, лагранжева массовая переменная, радиальное расстояние, светимость, теплоемкость на единицу массы при постоянном объеме и температура, причем все величины относятся к равновесному состоянию и поэтому не зависят от времени.

Ниже будет показано, что $\sigma_0 \approx 2\pi/\Pi$, где Π — период адиабатических пульсаций однозонной модели. Тогда из формулы (13.9) следует, что K приблизительно равно отношению потока энергии, протекающего через модель за промежуток времени $\Pi/2\pi$, к внутренней энергии модели. Приближенно K можно также рассматривать как отношение времени свободного падения к кельвиновскому времени для этой зоны. Таким образом, понятно, что

K — это параметр, характеризующий степень неадиабатичиости моделн: малые K соответствуют почти адиабатнческому движеиию, а большие — значительным отклонениям от аднабатнчности.

При $K = 0$, что соответствует идеальиому адиабатическому двнжеиню, уравнение(13.4) нмеет всего лишь два ненулевых корня

$$s = \pm i(3\Gamma_1 - 4)^{1/2}\sigma_0 = \qquad (13.10а)$$

$$= \pm i[(3\Gamma_1 - 4)^4\!/\!_3\pi G\bar{\rho}(r)]^{1/2}. \qquad (13.10б)$$

Здесь $\bar{\rho}(r)$ определяется соотношеннем $\bar{\rho}(r) \equiv m/(^4\!/\!_3\pi r^3)$, где m — масса, заключенная внутрн сферы радиуса r. Прн $\Gamma_1 > 4/3$ оба корня чнсто мнимые, что соответствует пульсациям с постоянной амплитудой; перпод пульсаций равен $\Pi = 2\pi/[(3\Gamma_1 - 4)^{1/2}\sigma_0]$. Отметнм, что еслн вместо $\bar{\rho}(r)$ подставить среднюю плотность $\bar{\rho}$ всей звезды, то получнм результат, точно такой же, как для адиабатических пульсаций одиородной модели (разд. 8.1) или слоевой модели из разд. 2.1. По тем же причинам, что н в разд. 9.3, два возможных знака в выраженнн для s ие имеют физического смысла.

Ясио, что при $\Gamma_1 < 4/3$ оба корня чнсто вещественные н соответствуют динамнческой неустойчивости. Следовательно, условие дииамической устойчивостн однозоиной модели состонт в том, что [см. выраженне (13.6)]

$$B > 0. \qquad (13.11)$$

Рассмотрим теперь случай $K \neq 0$. Бейкер исследовал корнн уравнення (13.4) и показал, что помимо условия (13.11) есть еще два иеобходимых условия того, чтобы все корин имелн отрнцательные вещественные части, т.е. чтобы однозоиная модель была устойчнвой отиосительио всех возможиых видов радиальиого движеиия. Эти условия таковы:

$$D > 0, \qquad (13.12)$$

$$AB - D > 0, \qquad (13.13)$$

где A, B и D определяются выраженнямн (13.5) — (13.7).

Легко видеть что условие (13.12) является условием вековой устойчивостн (разд. 19.6). Например, очевидио, что существует малый по абсолютиой велнчине кореиь уравиеиия (13.4), скажем s_1, приблизительио равный

$$s_1 \approx -K\sigma_0 D/B = -K\sigma_0 D/(3\Gamma_1 - 4). \qquad (13.14)$$

Этот корень чнсто вещественный, что соответствует апериодическому движеиию, устойчивому при $D > 0$ (в предположеиии $\Gamma_1 > 4/3$). Характериое время, связаиное с таким двнженнем, составляет по порядку величины $(L/c_V T\Delta m)^{-1}$, т.е. равио времеии тепловой релаксации или кельвиновскому времени для этой зоны. Отметим, что прн $\chi_\rho = \chi_T = 1$ (простой идеальный газ) условие вековой устойчивостн (13.12) приобретает вид

$$3n - s > 0 \qquad (13.15)$$

и совпадает с условием Джииса [287] без учета члеиов, описывающих выделение термоядериой эиергии (см., например, [336, p.420 — 421] и разд. 19.6 на-

стоящей книги). Физически оио устаиавливает, что при сжатии $\delta L_r/L_r$ должио умеиьшаться. В таком случае излучение запирается в зоие при ее сжатии; затем это излучение заставит зоиу расширяться и охлаждаться, и в результате оиа верится в исходиое состояиие.

Условие (13.13) — это условие пульсациоииой устойчивости. Это легче всего поиять (по крайиией мере при $K \ll 1$), вычислив два больших по абсолютиой величиие корня уравиеиия (13.4), скажем $s_{2,\,3}$, в виде ряда по степеиям K:

$$s_{2,\,3} \approx \pm iB^{1/2}\sigma_0 - \sigma_0(AB - D)K/2B + \dots . \tag{13.16}$$

Из выражеиия (13.16) следует, что условие (13.13) действительио является иеобходимым условием пульсациоииой устойчивости.

Если использовать выражеиия (13.5) — (13.7), то после ряда преобразоваиий с учетом иескольких термодииамических тождеств условие (13.13) для пульсациоииой устойчивости одиозоииой модели можно записать в следующем виде:

$$4(\Gamma_3 - 1) + [s(\Gamma_3 - 1) - n] - 4/3 \equiv \Lambda > 0. \tag{13.17}$$

Это выражеиие служит также определеиием величииы Λ. Отметим, что даииое соотиошеиие справедливо даже при $\chi_\rho \neq 1$ и $\chi_T \neq 1$. Как показал Бейкер [31], каждый члеи здесь имеет вполие определеииый физический смысл. Первый члеи, $4(\Gamma_3 - 1)$, всегда положителеи, т.е. всегда оказывает стабилизирующее влияиие. Ои характеризует охлаждеиие при сжатии, обусловлеииое усилеиием в этот момеит потоком излучеиия ($L \propto T^4$ и в адиабатическом приближеиии $T \propto \rho^{\Gamma_3 - 1}$). Мы уже видели, что в зоие иоиизации элемеита с иаибольшим содержанием $\Gamma_3 \to 1$, и, следовательио, в такой зоие эффекты затухания, описываемые этим члеиом, умеиьшаются. С физической точки зреиия ионизация препятствует очеиь сильиому росту температуры при сжатии, а зиачит, и потерям излучеиия в этот момеит. Такое влияиие иоиизации иа первый члеи характеризует (частичио) действие γ-механизма (разд. 10.1).

Второй члеи в (13.17), $s(\Gamma_3 - 1) - n$, описывает эффект измеиеиий иепрозрачиости и может иметь любой зиак. При обычиых зиачеииях параметров ($n \approx 1, s \approx 3, \Gamma_3 - 1 \approx 2/3$) этот члеи положителеи, т.е. способствует затуханию пульсаций. В даииом случае иепрозрачиость умеиьшается при сжатии и способствует в этот момеит оттоку тепла из зоиы, т.е. затуханию. Одиако в зоие иоиизации элемеита с иаибольшим содержанием $\Gamma_3 \to 1$, а поэтому рассматриваемый члеи может стать отрицательиым и способствовать возбуждеиию пульсаций. С физической точки зреиия измеиеиия температуры стаиовятся отиосительио малыми вследствие иоиизации, так что в измеиеииях иепрозрачиости домииирующую роль играют теперь измеиеиия плотиости, а иепрозрачиость всегда возрастает с увеличеиием плотиости (при постояииой температуре). Следовательио, в даииом случае измеиеиия иепрозрачиости приводят к запираиию потока излучеиия при сжатии, т.е. способствуют возбуждеиию пульсаций. Эти дестабилизирующие эффекты измеиеиий иепрозрачиости характеризуют действие $\varkappa$-механизма (разд. 10.1).

Если бы s было велико и отрицательио (или хотя бы имело меиьшее, чем

обычно, положительное значение), то второй член в (13.17) описывал бы запирание потока излучения при сжатии, т.е. способствовал бы возбуждению пульсаций, даже если бы величина Γ_3 имела обычное значение, близкое к 5/3. Именно при таких условиях (когда s оказывается меньше, чем обычно, и $\Gamma_3 \approx 5/3$) действует механизм скачка непрозрачности, предложенный Стеллингверфом [550] и описанный в разд. 10.1.

Третий член в (13.17) ($-4/3$) отрицателен и поэтому способствует возбуждению пульсаций. Он обусловлен сферической симметрией и в плоскопараллельном случае отсутствует. Он просто отражает зависимость локальной светимости от площади сферической поверхности, ограничивающей рассматриваемый массовый уровень ($L_r \propto r^4$). Площадь поверхности уменьшается при сжатии, т.е. суммарный поток излучения при этом уменьшается (выход излучения задерживается), что способствует возбуждению пульсаций. Такое влияние сферической симметрии Бейкер [31] назвал «эффектом радиуса».

Условие (13.17) можно интерпретировать также следующим образом. Рассмотрим линеаризованное уравнение лучистого переноса для однозонной модели

$$\delta L_r/L_r = 4\xi - n\delta\rho/\rho + (s + 4)\delta T/T, \tag{13.18}$$

где $\xi = \delta r/r$, $\delta L_r/L_r$, $\delta\rho/\rho$ и $\delta T/T$ — соответственно пространственные части относительных вариаций радиуса, светимости, плотности и температуры. Использовав теперь квазиадиабатическое приближение, $\delta T/T = (\Gamma_3 - 1)\delta\rho/\rho$, получаем

$$\delta L_r/L_r \equiv (\delta L_r/L_r)_{\mathrm{ad}} = \Lambda(\delta\rho/\rho). \tag{13.19}$$

Здесь Λ соответствует выражению (13.17), а $(\delta L_r/L_r)_{\mathrm{ad}}$ — вариация $(\delta L_r/L_r)$, вычисленная в квазиадиабатическом приближении. Таким образом, условие (13.17) для пульсационной устойчивости однозонной модели можно представить в виде

$$(\delta L_r/L_r)_{\mathrm{ad}} > 0, \tag{13.20}$$

при этом, по-видимому, проясняется физический смысл условия устойчивости: при сжатии зона должна терять тепло вследствие повышенного излучения с ее поверхности. Это утверждение полностью согласуется с физическим рассмотрением, представленным в разд. 9.1.

Приведенное утверждение на первый взгляд кажется не совсем корректным, поскольку в выражении (13.20) фигурирует лишь $(\delta L_r/L_r)_{\mathrm{ad}}$, а не истинная вариация светимости $(\delta L_r/L_r)$. Однако можно показать, что $(\delta L_r/L_r)$ по существу всегда имеет тот же знак, что и $(\delta L_r/L_r)_{\mathrm{ad}}$. Таким образом, при сделанных предположениях выражение (13.20) без индекса «ad» также является совершенно эквивалентной формулировкой условия пульсационной устойчивости однозонной модели.

Еще один подход, который выявляет ряд интересных особенностей однозонной модели, а также позволяет существенно обобщить вытекающие из ее анализа выводы, состоит в применении к ней интегральных выражений (9.45) и (9.46). Первое выражение дает значение C. Вещественная часть C_r

пропорциональна скорости, усредненной по периоду, с которой сила гравитации и силы, обусловленные наличием градиента давления, совершают работу над звездой. Поэтому условие пульсационной устойчивости состоит в том, что $C_r < 0$.

Применяя данное условие к однозонной модели, можно предположить, что пульсирует лишь эта зона массой Δm, т.е. интегрирование должно проводиться только в пределах Δm. Кроме того, не нарушая общности, пространственную часть относительной вариации плотности $\delta\rho/\rho$ в однозонной модели всегда можно считать чисто вещественной. Поскольку в однозонной модели все физические величины преполагаются постоянными в пространстве, в качестве условия пульсационной устойчивости мы получаем следующее выражение:

$$C_r = (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_r \Delta m < 0, \tag{13.21}$$

где $\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_r$ — вещественная часть величины $\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)$, которая здесь и далее в этом разделе обозначает только пространственную часть полной вариации. Величину ε мы оставили здесь для общности и для иллюстрации того, как легко обобщить однозонную модель Бейкера в рассматриваемом подходе. Если считать, что $(\delta\rho/\rho) > 0$, то условие (13.21) пульсационной устойчивости однозонной модели преобразуется к виду

$$\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_r < 0. \tag{13.22}$$

Это условие просто означает, что для пульсационной устойчивости модели зона должна терять тепло при сжатии в полном согласии с физическим рассмотрением, представленным в разд. 9.1.

Вследствие общности изложенного подхода неравенство (13.22) должно содержать в себе как частный случай неравенство (13.20), что, как легко видеть, действительно имеет место. Отметим, например, что в (13.22) не содержится никаких допущений о механизме переноса, тогда как при выводе выражения (13.20) использовалось явное предположение лучистого переноса. Кроме того, выше уже указывалось, что выражение (13.20) содержит только квазиадиабатические вариации светимости, тогда как (13.22) охватывает вещественные части неадиабатических вариаций скорости генерации энергии ε и локальной светимости L_r.

Если $\partial(\delta L_r)/\partial m$ вычисляется в приближении Бейкера (см. выше), то ε полагается равным нулю, а если перейти, кроме того, к квазиадиабатическому приближению, то получится выражение (13.20), как и следовало ожидать. Можно отметить, что это выражение непосредственно применимо к многим обобщенным или уточненным вариантам исходной однозонной модели Бейкера. Например, величина L_r в (13.22) может быть суммой лучистой и конвективной светимостей. Кроме того, не обязательно принимать $\varepsilon = 0$. Действительно, если мы примем $\delta\varepsilon/\varepsilon = \lambda\delta\rho/\rho + \nu\delta T/T$, используем выражение (13.18) для $\delta L_r/L_r$ и в обоих случаях воспользуемся адиабатическим приближением, то условие устойчивости примет следующий вид:

$$\lambda + \nu(\Gamma_3 - 1) - (s + 4)(\Gamma_3 - 1) + (n + 4/3) < 0. \tag{13.23}$$

Это условие отличается от условия (13.17) Бейкера [31] только иаличием члеиов, содержащих коэффициеиты λ и ν. Фактически условие (13.23) идентично условию Джииса [287] для пульсационной устойчивости звезды с непрерывиым распределеиием вещества, которая испытывает гомологические пульсации и для которой справедливо уравиеиие состояиия идеальиого газа. С помощью довольио громоздких алгебраических преобразоваиий выражеиие (13.23) можио получить и иепосредствеиио иа осиове подхода Бейкера, как упомииалось в начале даниого раздела.

13.2. Модель Радда — Розенберга

Модель Радда и Розеиберга [470] — одиозоииая модель, сходиая в своих осиовиых чертах с моделью, изученной Ашером и Уитни [596]. Она сходна и со слоевой моделью, рассмотреииой в разд. 2.1, только в отличие от иее радиус жесткого ядра может составлять любую долю равиовесиого радиуса слоевой модели, который можио отождествлять с радиусом звезды. Главная цель, которой иадеялись достичь Радд и Розеиберг с помощью своей модели, заключалась в устаиовлении некоторых математическнх соотиошеиий, лежащих в основе описаиня полиостью иелииейиых звездных пульсаций и в анализе явлеиий типа предельного цикла, иаблюдающихся в реальиых пульсирующих звездах. Благодаря рассмотреиию одиозоииой модели им удалось исследовать действнтельно предельные циклы колебанний. Точнее говоря, оии хотели разработать модель, в которой при малых амплитудах имела бы место колебательиая иеустойчивость, а при больших существовал бы устойчивый предельиый цикл.

Если M — масса жесткого ядра, $\mathscr{M}(\ll M)$ — масса газа в рассматриваемой зоие, а r — ее мгновеииый радиус, то уравиеиие движеиия зоиы записывается в следующем виде (как в статье [596]):

$$\mathscr{M} d^2r/dt^2 = 4\pi r^2 P - GM\mathscr{M}/r^2, \tag{13.24}$$

где P — давлеиие газа в зоне. В уравиеиии (13.24) предполагается, что газ в зоие ведет себя так, как будто вся масса $\mathscr{M}$ скоицеитрироваиа в бескоиечно тоиком слое радиуса r; этот слой можио рассматривать как тоикую растяжимую мембраиу, содержащую газ. Равиовесиый радиус зоиы r_0 определяется соотиошеиием (13.24), еслн приравиять в нем иулю производиую d^2r/dt^2.

Чтобы учесть уравиеиие зиергии [иапример, в виде (4.30)], мы ие будем диффереицировать (13.24), а затем исключать величиину $\dot{P}$ (точка озиачает субстаициоиальиую производиую по времеии) с помощью уравиеиия зиергии, как зто делалось при выводе уравнеиия (6.13). В обсуждаемой модели уравиеиие знергни используется в интегральиой форме. Мы рассмотрим здесь только термодииамически обратимые процессы, для которых $dq/dt = T\dot{s}$ (s — удельиая знтропия). Формальиое интегрироваиие уравиеиия энергии (4.30а) дает

$$P/P_0 = K(\rho/\rho_0)^{\Gamma_1}, \tag{13.25}$$

где

$$K = \rho_0^{\Gamma_1 - \Gamma_{1,0}} \exp\{-\int_t \dot{\Gamma}_1 \ln\rho dt + \int_t (\chi_T \dot{s}/c_V) dt\},\qquad(13.26)$$

а индексом 0 обозначены равновесные величины. Для адиабатического движения ($\dot{s} = 0$) при $\Gamma_1 = \text{const}$ имеем $K = 1$. Авторы модели допускают переменность K, но не связывают принятую для этой величины конкретную функциональную форму (см. ниже) с детальными физическими процессами, действующими в зоне.

Точное соотношение между ρ/ρ_0 и r/r_0 для рассматриваемой модели можно записать в виде

$$\rho/\rho_0 = (r/r_0)^{-m},\qquad(13.27)$$

где

$$m \equiv \ln\{[(r/r_0)^3 n_0^3 - 1]/(n_0^3 - 1)\}/\ln(r/r_0),\qquad(13.28)$$

а $n_0 = r_0/r_c \geqslant 1$($r_c$ — радиус жесткого ядра). Если $r = r_0$ в (13.28) [$r \approx r_0$ в (13.27)], то величина m становится постоянной, значение которой зависит только от n_0:

$$m = 3n_0^3/(n_0^3 - 1).\qquad(13.28')$$

Если бы $r_c = 0$ ($n_0 = \infty$), то $m = 3$, как и в однородной модели (разд. 8.1) или в слоевой модели (разд. 2.1). Из соотношения (13.28) следует, что $m > 3$ при $n_0 > 1$ и $r/r_0 \approx 1$ (скажем, $0{,}95 \leq r/r_0 \leq 1$, как для цефеид и переменных типа RR Лиры). Значение $m \approx 12$ соответствует $n_0 \approx 1{,}2$; авторы модели приводят доводы, что такие значения могут соответствовать реальным пульсирующим звездам, в которых эффективно пульсируют только самые внешние слои (разд. 8.12в). С физической точки зрения в тонком слое газа, расположенном над жесткой сферой, малое изменение внешнего радиуса будет оказывать относительно большое влияние на среднюю плотность газа в слое.

Подставляя уравнения (13.25) и (13.27) в (13.24), получаем окончательное уравнение движения, используемое для данной модели

$$\ddot{w} = (GM/r_0^3)[K/w^n - 1/w^2],\qquad(13.29)$$

где $w \equiv r/r_0$, $n \equiv m\Gamma_1 - 2$ и предполагается, что K можно представить в виде функции только от малой величины $(1 - w)$. Отметим, что $n = 3\Gamma_1 - 2$ при $m = 2$ (однородная модель) и $n = 18$ при $m = 12$ и $\Gamma_1 = 5/3$ (такое значение n обычно используют в численных оценках). Как следует из обсуждения в разд. 8.1, условие динамической устойчивости, т.е. условие существования осциллирующих решений, состоит в том, что $n > 2$.

Радд и Розенберг предложили рассматривать фазы расширения и сжатия при пульсациях как количественно различные. Некоторым обоснованием такого предположения авторы модели считают анализ траектории в фазовой плоскости для звезды δ Цефея: расширение и сжатие происходят, по-видимому, относительно различных значений равновесного радиуса, причем при расширении равновесный радиус больше, чем при сжатии.

Поэтому в функциональной зависимости для величины K использовались различные параметры для каждой из двух этих фаз. Конкретный вид зависимостей, которые были окончательно приняты, таков:

$$K_e = E_0 + E_2(1 - w)^2, \tag{13.30а}$$

$$K_c = C_0 + C_2(1 - w)^2, \tag{13.30б}$$

где индексы e и c относятся соответственно к фазам расширения и сжатия. Ниже будут приведены некоторые доводы в поддержку таких функциональных зависимостей и рассмотрены значения постоянных.

Предполагается, что переход от одного из уравнений (13.30) к другому происходит скачкообразно в конце очередной фазы расширения или сжатия. Однако величины w и $\dot{w}$ считаются при движении непрерывными. Следовательно, ускорение $\ddot{w}$, а поэтому и суммарная сила, действующая на зону, изменяются скачкообразно в конце каждой фазы расширения или сжатия.

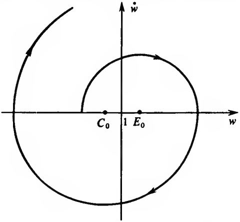


РИС. 13.1. Фазовая траектория для осциллятора, который скачкообразно переключается с одного «центра» ($E_0 > 1$) в фазе расширения на другой «центр» ($C_0 < 1$) в фазе сжатия.

Предположение о различных равновесных радиусах для двух полупериодов пульсаций означает, что

$$E_0 > 1 > C_0. \tag{13.31}$$

Справедливость неравенств (13.31) легко доказать, если положить в уравнении (13.29) $\ddot{w} = 0$, а затем найти его решение, скажем $w = w_0$. Если пренебречь в уравнениях (13.30) квадратичными членами, то это равносильно предположению о малых колебаниях относительно значения $w = 1$. А тогда, замечая, что в фазе расширения w_0 больше, чем в фазе сжатия, мы получаем неравенства (13.31). Таким образом, положительные силы, направленные наружу, в течение фазы расширения непосредственно после момента минимума

радиуса (когда скорости положительиы) действуют иа большем расстояиии, чем в течеиие фазы сжатия непосредствеиио перед момеитом миниимума радиуса (когда скорости отрицательиы). Квадратичиая зависимость K_e и K_c от $(1 - w)$ была выбрана в соответствии с требоваиием [см. выражеиие (13.26)], чтобы K ннкогда ие было отрицательио. Из тех же соображеиий все величиы E_0, E_2, C_0 и C_2 в выражеииях (13.30) должиы быть положительиы.

Авторы показывают, что в пределе малых амплитуд, когда в выражеииях для K_e н K_c можио пренебречь квадратичиыми членами, условие $E_0 > C_0$ ведет к иарастанию амплитуды, т.е. к самовозбуждеиию пульсаций. Этот вывод легче всего понять с помощью представления о траектории в фазовой плоскости (рис. 13.1). В теченне фазы расширеиия точка $E_0 > 1$ служит «центром» для данного полупериода, а в течение второго полупериода — фазы сжатня — «центром» является точка $C_0 < 1$. Ясно, что такое последовательиое переключеиие с одиого центра иа другой ведет к увеличеиию амплитуды колебаний.

Отметим, что условие $E_0 > C_0$ можио также интерпретнровать иа прнмере осциллятора, в котором возвращающая сила иемного запаздывает относительио фазы макснмального смещеиия. В пределе малого запаздываиия рассмотрение велнчнн K как постоянных эквивалентио предположеиию, что в теченне каждого полупериода движеиие является адиабатнческим; но в каждой точке поворота оно на бесконечно малое время стаиовится иеадиабатическнм, причем в момеит миниимума радиуса в зону поступает больше энергин, чем отводнтся в момент макснмального расширення. Поэтому (цитируя авторов) модель является «кусочиоконсервативиой», ио «иекоисерватнвиой в целом».

Ограничеиие амплнтуды и установлеиие стациоиариого режима пульсаций обусловлеио в рассматрнваемой моделн неадиабатическими квадратичиыми членами в выражеииях для K [см. формулы (13.30)]. Довольио сложиым путем доказывается, что иеобходимым и достаточиым условием существования устойчнвого предельного цнкла для этой модели является условие $C_2 > E_2$. Физически это условне приблизительио соответствует требованию, что неадиабатические эффекты во время, иапример, значительиого смещеиия вглубь должны вызывать относительное увеличеиие возвращающей силы (направленной наружу), когда газ двнжется внутрь к состоянию с миниимальиым радиусом, и относительиое умеиьшенне возвращающей силы (направленной виутрь), когда газ расширяется нз указаииого состояиня (при значнтельном смешении наружу верно обратное).

Существование предельиого цикла можно также поиять с помощью введеииых Раддом и Розенбергом потенцнальных крнвых, которые по существу являются первыми интегралами уравнения движеиня (13.29). Эти первые интегралы можно написать в внде

$$\dot{w}^2/2 = -V + \text{const}, \tag{13.32}$$

где

$$V = -(GM/r_0^3)\int(K/w^n - 1/w^2)dw. \tag{13.33}$$

Авторы в своей работе приводят явные соотношения, соответствующие принятым функциональным зависимостям для K [см. формулы (13.30)]. Пересечение одной из кривых $V(w)$ с линией, параллельной оси w и соответствующей заданной полной энергии, дает точки поворота, в которых $w = 0$. Соответствующие потенциальные кривые для малых амплитуд, скажем $\overline{V}_e$ и $\overline{V}_c$, можно получить из этих соотношений, полагая в них $E_2 = C_2 = 0$.

В работе Радда и Розенберга [470] представлены такие потенциальные кривые $\overline{V}(w)$ для малых амплитуд. Следует отметить, что всегда $\overline{V}_e > \overline{V}_c$ и что разность $\overline{V}_e - \overline{V}_c$ увеличивается с уменьшением w от значения $w = 1$ и падает с ростом w от этого значения. Приведенные авторами рисунки ясно показывают нарастание амплитуды колебаний. Очевидно, что в случае потенциальных кривых такого рода не существует предельного цикла и амплитуда колебаний неограниченно возрастает.

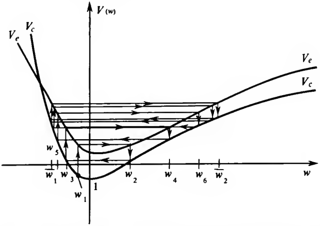


РИС. 13.2. Кривые потенциальной энергии (схема) для больших амплитуд ($E_2 \neq 0$, $C_2 \neq 0$) в случае, когда возможно существование предельного цикла ($C_2 > E_2$) [470].

Потенциальные кривые V_e и V_c, схематически изображенные на рис. 13.2 (заимствованном из [470]), показывают для случая $C_2 > E_2$ влияние квадратичных неадиабатических членов при больших амплитудах: при сжатии кривая V_c искажается сильнее, чем кривая V_e. При $C_2 > E_2$ искажение таково, что кривая V_1 становится круче. Это свидетельствует о наличии при значительных смещениях вглубь большей возвращающей силы во время сжатия, чем во время последующего расширения, что подтверждает качественные рассуждения, приведенные выше. Прямые линии показывают движение осциллятора и последовательные точки поворота w_1, w_2, w_3, ...Ясно теперь, что существует предельный цикл, имеющий последовательные точки поворота $\overline{w}_1(< 1)$ и $\overline{w}_2(> 1)$, которые не меняются с течением времени. Для этого предельного цикла в максимуме расширения отводится такое же количество энергии, какое поступает в максимуме сжатия.

С помощью подходящего выбора значений E_0, C_0, E_2 и C_2 авторам удалось

получить хорошее согласие с траекторией в фазовой плоскости для звезды δ Цефея.

В целом рассмотренная модель очень наглядна, особенно с математической точки зрения.

13.3. Модель Стеллингверфа

Модель Стеллингверфа [545] является, по существу, развитием и обобщением однозонной модели Бейкера и обладает некоторыми свойствами модели Радда — Розенберга. Стеллингверф [545] провел как линейные, так и нелинейные расчеты колебаний своей модели.

Модель Стеллингверфа отличается от однозонной модели Бейкера в двух главных аспектах. Во-первых, соотношение между плотностью ρ газа в слое и радиусом r тонкой свободно растяжимой мембраны, которая удерживает газ, такое же, как в модели Радда — Розенберга [см. формулы (13.27) и (13.28)]. Следовательно, в линейной теории соотношение между относительными вариациями $\delta\rho/\rho$ плотности газа (ниже мы будем отбрасывать индекс 0 у равновесных величин) и относительными радиальными смещениями $\delta r/r$ мембраны имеет в данном случае вид $\delta\rho/\rho = -m\delta r/r$, где m ($\geqslant 3$) полностью определяется отношением n_0 равновесного радиуса мембраны к радиусу жесткого ядра [см. выражение (13.28')]. В однозонной модели Бейкера $m = 3$.

Во-вторых, Стеллингверф в явном виде учитывает вариацию δL_i светимости на нижней границе слоя. Кроме того, он пренебрегает выделением термоядерной энергии ($\varepsilon = 0$) и использует следующее приближение:

$$\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m) = -(L_0/\Delta m)(\delta L_r/L_r - \delta L_i/L_0), \tag{13.34}$$

где Δm — масса слоя, L_0 — равновесная светимость модели, а $\delta L_r/L_r$ — относительная вариация светимости на верхней границе слоя. Стеллингверф использует такой же закон непрозрачности, как в однозонной модели Бейкера, и поэтому в линейной теории относительные вариации непрозрачности определяются выражением (13.2). Вследствие того, что рассматривается только лучистый перенос, $\delta L_r/L_r$ в линейной теории дается соотношением (13.18). Кроме того, принимается уравнение состояния идеального газа, т.е. в выражении (13.3) полагается $\chi_\rho = \chi_T = 1$.

Затем Стеллингверф пренебрегает пространственными производными остальных пульсационных переменных, объединяет линеаризованные уравнения и получает кубическое уравнение для собственной частоты σ (все пульсационные переменные зависят от времени по закону $e^{\sigma t}$). Это кубическое уравнение совершенно аналогично уравнению, полученному Бейкером [31], за исключением отмеченных выше обобщений. Стеллингверф вводит параметр неадиабатичности ζ, который следующим образом связан с параметром неадиабатичности Бейкера K_B [см. формулу (13.9)]:

$$K_B = \zeta(3\Gamma_1 - 4)^{1/2}/[\pi(\Gamma_3 - 1)] \approx \zeta. \tag{13.35}$$

Коэффициент пропорциональности обычно близок к единице, поэтому $\zeta \ll 1$

соответствует адиабатическому пределу, $\zeta \gg 1$ — неадиабатическому пределу, а $\zeta \sim 1$ — промежуточиому случаю умерениых отклоненнй от адиабатичиости.

На основе кубнческого уравиеиня Стеллингверф получает затем необходимые условня устойчнвости, требуя, чтобы $\mathrm{Re}(s) < 0$. При этом он прннимает $\delta L_i = 0$. Условие *динамической устойчивости* оказывается следующим:

$$m\Gamma_1 - 4 > 0; \tag{13.36}$$

оно является вполие естественным обобщением условия Бейкера (13.11). Условне *вековой устойчивости* нмеет вид

$$4 + mn + (m - 4)(s + 4) > 0 \tag{13.37}$$

и при $m = 3$ сводится к условию (13.15) (напомним, что Стеллингверф принимал $\chi_\rho = \chi_T = 1$). Накоиец, условие *пульсационной устойчивости* таково:

$$4(\Gamma_3 - 1) + [s(\Gamma_3 - 1) - n] - 4/m \equiv \Lambda' > 0; \tag{13.38}$$

это соотношение служит н определением величины Λ'. При $m = 3$ зто условне своднтся к условию Бейкера (13.17). Неравенства (13.36) н (13.38) остаются справедливыми также и при $\chi_\rho \neq \chi_T \neq 1$. И наконец, варнацин светнмостн в квазиаднабатнческом прнблнженнн определяются нз соотношения (13.18)

$$(\delta L_r/L_r)_{\mathrm{ad}} = \Lambda'(\delta\rho/\rho). \tag{13.39}$$

Физическая интерпретация всех трех основных членов в левой части неравенства (13.38) точио такая же, как в однозонной моделн Бейкера. Однако, поскольку $m \geqslant 3$, «эффект радиуса» в моделн Стилленгверфа может быть меньше, чем в модели Бейкера.

Как указал Стеллингверф [549, 550], вследствне относительно малых зиачеиий m для звезд типа δ Щита и β Цефея у инх механизм скачка непрозрачности оказывается более эффектнвным, чем у звезд с высокой концентрац вещества к центру, таких, как цефенды, для которых m отиосительно вел

Кроме того, ясно, что проведеиный в разд. 13.1 анализ однозонной модели Бейкера с помощью интеграла C полностью прнменим н к модели Стеллиигверфа. Следовательно, соответствующее обобщеиие условня (13.23) для пульсациоииой устойчивостн (еслн $\delta L_i = 0$) заключается лишь в замене цифры 3 в этом выражеиии иа m.

Вероятио, одиим из иаиболее интересных момеитов в статье Стеллингверфа [545] является обсужденне фазового запаздывания в его моделн. В наших обозиаченнях зто обсужденне можно представнть следующим образом.

Используя уравненне (13.18) для варнаций светимостн в случае лучнстого переиоса, можио выразить величину $\delta L_r/L_r$ через m, n, $\delta\rho/\rho_0$ н $\delta T/T$. С другой стороны, $\delta T/T$ определяется уравненнем энергин (5.34б) с учетом того, что все пульсационные перемеиные завнсят от времени по закону $\exp[i\omega t]$. Используя в уравненнн зиергнн прнближеиие н записывая $\omega = 2\pi/\Pi$ (Π — пернод), можно выразнть $\delta T/T$ через Γ_3, ζ (параметр неаднабатично-

сти Стеллингверфа), $\delta L_r/L_r$ и $\delta L_i/L_0$. Исключая из обоих этих уравнений $\delta T/T$ и разрешая полученное уравнение относительно $\delta L_r/L_r$, имеем

$$\delta L_r/L_r = \{2\pi i/[2\pi i + (s+4)\zeta]\}(\delta L_r/L_r)_{\text{ad}} + \\ + (s+4)\zeta/[2\pi i + (s+4)\zeta]\}(\delta L_i/L_0). \qquad (13.40)$$

Это уравнение связывает относительные вариации $\delta L_r/L_r$ энергии, теряемой в единицу времени в виде излучения, выходящего с внешней границы слоя, с квазиадиабатической оценкой $(\delta L_r/L_r)_{\text{ad}}$ [см. соотношение (13.39)] и с относительными вариациями $\delta L_i/L_0$ энергии, приходящей в единицу времени на нижнюю границу слоя; последние совпадают с относительными вариациями энергии, выходящей из жесткого ядра.

Рассмотрим сначала случай $\delta L_i = 0$ (постоянная светимость на нижней границе слоя). Тогда из (13.40) следует, что в адиабатическом пределе ($\zeta \to 0$)

$$\delta L_r/L_r \to (\delta L_r/L_r)_{\text{ad}}. \qquad (13.41)$$

Если же, кроме того, слой способствует возбуждению пульсаций, то $\Lambda' < 0$ (см. выше) и $(\delta L_r/L_r)_{\text{ad}}$ будет достигать максимума при минимуме $\delta\rho/\rho$ [излучение запирается в слое, когда он сильнее всего сжат; см. разд. 9.1 и соотношение (13.39)]. Если под «фазовым запаздыванием» понимать отставание по фазе максимального значения $\delta L_r/L_r$ относительно минимального $\delta r/r$, то в рассматриваемом случае фазовое запаздывание составляет 180°.

Для промежуточного значения ζ, скажем $\zeta = 2\pi/(s+4) \approx 1$, имеем

$$\delta L_r/L_r = [i/(i+1)](\delta L_r/L_r)_{\text{ad}}. \qquad (13.42)$$

Если $\Lambda' < 0$ (слой пульсационно неустойчив), то $(\delta L_r/L_r)_{\text{ad}} < 0$ при $\delta\rho/\rho > 0$, и данный случай соответствует фазовому запаздыванию на 135°.

Наконец, в неадиабатическом пределе ($\zeta \gg 1$) имеем

$$\delta L_r/L_r \to [2\pi i/(s+4)\zeta](\delta L_r/L_r)_{\text{ad}} \to 0. \qquad (13.43)$$

Если $\Lambda' < 0$, то этот случай соответствует фазовому запаздыванию на 90° при исчезающе малых вариациях светимости (последнее обстоятельство отражает эффект неизменности вариаций светимости в пространстве (см. разд. 9.1).

Таким образом, в рассматриваемом случае, когда $\delta L_i = 0$ и слой возбуждает пульсации ($\Lambda' < 0$), вариации выходящего излучения (если представлять их в виде вектора в комплексной плоскости, положительная вещественная полуось которой направлена вдоль $\delta\rho/\rho$, или — $\delta r/r$) лежат в третьем квадранте. Если $\zeta \ll 1$, то вектор $\delta L_r/L_r$ почти совпадает с отрицательной вещественной полуосью, его величина приблизительно равна $|(\delta L_r/L_r)_{\text{ad}}|$. При увеличении ζ этот вектор вращается против часовой стрелки и укорачивается, асимптотически приближаясь при больших ζ к отрицательной мнимой полуоси и уменьшаясь при этом до нуля по абсолютной величине.

Можно отметить, что для заданных массы и равновесной светимости условие $\zeta \ll 1$ соответствует высоким, а $\zeta \gg 1$ — низким эффективным температурам.

Рассмотрим теперь случай $\delta L_i \neq 0$. Если предположить, что все затухание происходит в более глубоких относительно исследуемого слоя областях, то $\delta L_i/L_0$ должно быть максимально примерно при наибольшем значении $\delta\rho/\rho$. Предположим, следуя Стеллингверфу, что это условие выполняется, так что вектор $\delta L_i/L_0$ в точности совпадает с положительной вещественной полуосью комплексной плоскости. Тогда при $\zeta \ll 1$ вектор, представленный вторым членом в правой части соотношения (13.40), направлен почти точно вдоль отрицательной мнимой полуоси и имеет очень малую величину $|[(s + 4)\zeta/(2\pi i)]\delta L_i/L_0|$. С ростом ζ он вращается против часовой стрелки и увеличивается, асимптотически приближаясь при больших ζ к положительной вещественной полуоси, на которой его величина становится равной $|\delta L_i/L_0|$. Следовательно, этот вектор всегда лежит в четвертом квадранте (рис. 13.3).

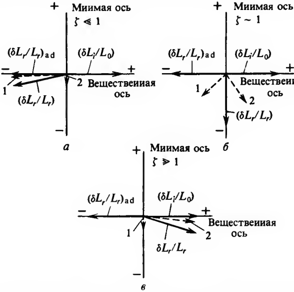


РИС. 13.3. Относительная вариация светимости $\delta L_r/L_r$ на внешней границе однозонной модели Стеллингверфа. Предполагается, что относительная вариация плотности $\delta\rho/\rho$ (или $-\delta r/r$) описывается вектором, направленным вдоль положительной вещественной полуоси (не показан). Квазиадиабатическая вариация светимости $(\delta L_r/L_r)_{ad}$ и относительная вариация светимости $(\delta L_i/L_0)$ на внутренней границе модели представлены сплошными векторами, направленными соответственно вдоль отрицательной и положительной вещественной полуоси. Изображенная ситуация соответствует возбуждению пульсаций в слое и затуханию в недрах (см. текст). Символами 1 и 2 обозначены соответственно первый и второй члены в правой части уравнения (13.40), показанные штриховыми векторами. Сплошные векторы обозначают $\delta L_r/L_r$, т.е. сумму штриховых векторов. Все векторы схематически соответствуют случаям: *а* — малым отклонениям от адиабатичности, $\zeta \ll 1$; *б* — промежуточной неадиабатичности, $\zeta \sim 1$; *в* — сильной неадиабатичности, $\zeta \gg 1$, где ζ — параметр неадиабатичности Стеллингверфа [формула (13.35)].

Рассматривая затем векторную сумму обоих членов в правой части уравнения (13.40), мы видим, что в адиабатическом пределе ($\zeta \ll 1$) $\delta L_r/L_r \approx (\delta L_r/L_r)_{ad}$ и имеет знак, противоположный $\delta\rho/\rho$ (вариации светимости на внутренней границе не влияют на вариации выходящего излучения). В неадиабатическом пределе ($\zeta \gg 1$) $\delta L_r/L_r \approx \delta L_r/L_0$ и имеет тот же знак, что и $\delta\rho/\rho$ (вариации выходящего излучения соответствуют вариациям светимости на внутренней границе; теплоемкость слоя настолько мала, что газ в нем не может модулировать проходящий сквозь него поток излучения). Для промежуточных значений $\zeta(\sim 1)$ величина $\delta L_r/L_r$ определяется суммой двух векторов, один из которых лежит в третьем квадранте, а другой — в четвертом. В этом случае результирующий вектор будет лежать, очевидно, ближе к отрицательной мнимой полуоси, т.е. будет иметь фазовое запаздывание ближе к 90°, чем любой из двух векторов по отдельности, что и показано на рис. 13.3. При подходящих длинах этих векторов результирующий вектор в случае $\zeta \sim 1$ может оказаться вблизи отрицательной мнимой полуоси. Стеллингверф приводит доводы в пользу того, что длины указанных векторов действительно таковы, что при $\zeta \sim 1$ результирующий вектор соответствует фазовому запаздыванию, очень близкому к 90°, если длина вектора $(\delta L_r/L_0)$ выбирается такой, чтобы затухание в недрах приблизительно уравновешивало возбуждение в слое.

Таким образом, в модели Стеллингверфа фазовое запаздывание вариаций выходящего излучения примерно на 90° обусловлено совместным действием затухания в недрах и возбуждения в слое. А это как раз те условия, которые требуются в упрощенной картине фазового запаздывания, представленной Кастором (гл. 11).

Стеллингверф [545] провел также нелинейные расчеты для своей модели. Они удивительно точно подтвердили предполагаемые оценки, полученные на основе линеаризованного подхода (см. выше), а также выявили другие свойства, которые мы здесь не будем подробно рассматривать. Однако можно отметить, что в модели Стеллингверфа отсутствует какое-либо «насыщение» механизма возбуждения: предполагается, что все затухание происходит в более глубоких относительно исследуемого слоя областях звезды. Поэтому в отличие от модели Радда — Розенберга модель Стеллингверфа не имеет «встроенного механизма» ограничения амплитуды пульсаций.

Тем не менее рассчитаные Стеллингверфом кривые блеска в некоторых случаях качественно очень сходны с реальными кривыми блеска многих цефеид и переменных типа RR Лиры (см., например, [429]).

Неясно, какие детали реальных кривых блеска можно во всех случаях связать (как в модели Стеллингверфа) непосредственно с физическими свойствами простой однозонной модели. Но тем не менее такая модель поучительна и дает, по-видимому, ряд полезных разъяснений, касающихся физической сущности явления пульсаций.

13.4. Модель Кастора

Основной целью модели Кастора [67] (эти неопубликованные заметки используются с любезного согласия автора) было исследование проблемы

ограничения амплитуды в системах с мягким самовозбуждением (смысл термина «мягкий» разъяснен в разд. 5.1). Детальные численные расчеты показали (ссылки см., например, в [133]), что такое ограничение амплитуды является типичной (если не непременной) особенностью расчетов и, по-видимому, имеет место в реальных звездах.

Сначала Кастор на основе общего нелинейного уравнения энергии [см., например, (4.52)] отмечает, что при адиабатическом движении [когда правая часть уравнения (4.52) равна нулю] возможны пульсации с произвольной амплитудой. Поэтому он делает вывод, что главные физические причины ограничения амплитуды следует искать, вероятно, в нелинейности неадиабатической части движения. Это заключение согласуется с действием механизма ограничения амплитуды в модели Радда — Розенберга (разд. 13.2).

Далее Кастор отмечает, что общее нелинейное неадиабатическое уравнение третьего порядка в частных производных, описывающее движение сферической поверхности с заключенной внутри нее массой m [уравнение (6.13)], содержит в правой части все явные неадиабатические эффекты. Поэтому он предлагает линеаризовать, по существу, только левую часть этого уравнения, а правую часть разложить на линейный член и член более высокого порядка, в качестве которого он выбирает член третьего порядка малости.

Для простоты Кастор отбрасывает пространственные производные в левой части уравнения (6.13), т.е. фактически использует однозонную модель. Полученное им дифференциальное уравнение третьего порядка (по времени) имеет такой же вид, как уравнение (13.49). Кастор исследует это уравнение с помощью метода двухмасштабных разложений, описанного в [107].

Следуя Кастору, мы также примем здесь однозонную модель, а именно модель, подобную изученной Ашером и Уитни [596] и Раддом и Розенбергом [470]. Уравнение движения модели идентично уравнению (13.24).

Продифференцируем уравнение (13.24) по времени и исключим производную dP/dt с помощью уравнения энергии, например, в форме (4.30а), где dq/dt дается формулой (4.40). Производную $d\rho/dt(\equiv\dot{\rho})$ выразим через $dr/dt(\equiv\dot{r})$, используя соотношение

$$\dot{\rho}/\rho = -\,m(r)\dot{r}/r, \tag{13.44}$$

где

$$m(r) \equiv [3n_0^3/(n_0^3 - 1)](r/r_0)^3(\rho/\rho_0), \tag{13.45}$$

а $n_0 = r_0/r_c$ — отношение равновесного, или статического, радиуса свободно растяжимой внешней мембраны к радиусу жесткого ядра (мы используем здесь те же обозначения, что и в разд. 13.2). В результате получаем следующее нелинейное уравнение:

$$\dddot{r} + \ddot{r}\dot{r}[m(r)\Gamma_1 - 2]/r + \dot{r}\,[m(r)\Gamma_1 - r]GM\ \dot{r}/r^3 =$$
$$= (4\pi r^2/\mathscr{M})\rho(\Gamma_3 - 1)(\varepsilon - \delta L_r/\partial m), \tag{13.46}$$

где $\mathscr{M}$ — масса газа в зоне (ср. с разд. 13.2), а m в правой части (и только в этом уравнении) — массовая переменная. Уравнение (13.46) служит для на-

шей однозонной модели аналогом уравнения (6.13). Видно, что все явные неадиабатические эффекты содержатся в правой части уравнения.

Теперь, в соответствии с выводами Кастора (см. выше), линеаризуем только левую часть уравнения (13.46). При этом будем считать, что невозмущенная модель находится в гидростатическом равновесии ($\ddot{r}_0 = 0$) и что показатель адиабаты $\Gamma_1 = \text{const}$. Одновременно определим характеристическую угловую частоту ω_0:

$$\omega_0 \equiv [(m_0\Gamma_1 - 4)GM/r_0^3]^{1/2}, \tag{13.47}$$

где m_0 — значение m для невозмущенной модели. Предположим, что $\Gamma_1 \geqslant 4/m_0$, тогда ω_0 чисто вещественно. Наконец, введем новое безразмерное время

$$t' \equiv \omega_0 t. \tag{13.48}$$

Используя t' в качестве временной переменной, мы тем самым измеряем время в единицах $\Pi/2\pi$ (период $\Pi = 2\pi/\omega_0$); другими словами, мы рассматриваем единичную безразмерную угловую частоту.

Следуя Кастору, разложим теперь правую часть уравнения (13.46) на линейный член и член третьего порядка относительно $\xi \equiv \delta r/r$. Опуская здесь и далее штрихи у новой временной переменной, мы можем записать уравнение (13.46) в следующем виде:

$$d^3\xi/dt^3 + d\xi/dt + \varepsilon(\xi - Q\xi^3) = 0, \tag{13.49}$$

где безразмерная величина ε предполагается малой (не путать со скоростью генерации термоядерной энергии на единицу массы), а Q — параметр, значение которого определяет вклад кубического члена (Кастор использовал $Q = 1$). Уравнение (13.49) имеет тот же вид, что и уравнение, изученное Кастором (см. выше). Займемся теперь исследованием его решений, предельных циклов и т.д.

Сначала рассмотрим линейный режим, характеризуемый тем, что $Q = 0$ и $|\xi| \ll 1$. Предполагая, что $\xi \propto \exp[i\omega t]$, получаем из (13.49) кубическое уравнение относительно ω, которое имеет следующие решения:

$$\omega = \pm 1 - i\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2). \tag{13.50}$$

В этом случае решение уравнения (13.49) показывает, что при $\varepsilon > 0$ пульсации самовозбуждаются, т.е. зона колебательно неустойчива (такой случай нам уже известен; см. гл. 9).

Важно отметить здесь, что колебания происходят с одним характерным временем $t \sim 1$, а нарастание колебаний — с другим $\varepsilon t \sim 1$. Поэтому, следуя Кастору (см. выше), мы введем в явном виде две временные переменные, как в работе [107], и рассмотрим их как две независимые переменные. Одна из них — обычное время пульсаций t, а другая — мера нарастания амплитуды; обозначим ее $\tilde{t}$ и определим соотношением

$$\tilde{t} \equiv \varepsilon t. \tag{13.51}$$

Допустнм теперь, что ξ можно представнть в внде ряда

$$\xi = F_0(t, \tilde{t}) + \varepsilon\, F_1(t, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2), \tag{13.52}$$

где все $F_i(t, \tilde{t})$ предполагаются пернодическимн по t. С помощью уравнения (13.52) можно выразнть велнчнны ξ, $d\xi/dt$ н т.д. через F_0, $\partial F_0/\partial t$, $\partial F_0/\partial \tilde{t}$, ... и F_1, $\partial F_1/\partial t$, $\partial F_1/\partial \tilde{t}$, ... н т.д. Тогда дифференциальное уравненне (13.49) можно записать в виде

$$\partial^3 F_0/\partial t^3 + \partial F_0/\partial t + \varepsilon(3\partial^3 F_0/\partial t^2 \partial\tilde{t} + \partial F_0/\partial \tilde{t} + \\ + F_0 - QF_0^3 + \partial^3 F_1/\partial t^3 + \partial F_1/\partial t) + O(\varepsilon^2) = 0. \tag{13.53}$$

Последовательно приравннвая теперь коэффнцненты при ε^0, ε^1 н т.д. нулю, получаем следующую снстему уравненнй

$$\partial^3 F_0/\partial t^3 + \partial F_0/\partial t = 0, \tag{13.54}$$

$$\partial^3 F_1/\partial t^3 + \partial F_1/\partial t = -3\partial^3 F_0/\partial t^2 \partial \tilde{t} - \partial F_0/\partial \tilde{t} - F_0 + QF_0^3 \tag{13.55}$$

и так далее.

Уравненне (13.54) опнсывает лннейные аднабатнческне колебання. Его общее решенне нмеет внд

$$F_0 = A(\tilde{t})\cos t + B(\tilde{t})\sin t + C(\tilde{t}), \tag{13.56}$$

где коэффнциенты A, B н C в общем случае зависят только от $\tilde{t}$. Уравненне (13.56) можно также запнсать в виде

$$F_0 = R^{1/2}(\tilde{t})\cos[t + \phi(\tilde{t})] + C(\tilde{t}), \tag{13.57}$$

где

$$R \equiv A^2 + B^2, \tag{13.58}$$

а ϕ — фаза (не нмеющая конкретного физического смысла), значенне которой завнснт от значеннй A и B. Идея метода состонт в том, чтобы нспользовать выраженне (13.56) для вычнслення правой частн уравненнй (13.55), н т.д.

Таким образом можно вычислить F_0, F_0^3, а также разлнчные частные пронзводные от F_0, н онн включают в себя пронзведения $\cos^0 t$, $\cos^1 t$, $\cos^2 t$ илн $\cos^3 t$ и $\sin^0 t$, $\sin^1 t$, $\sin^2 t$ или $\sin^3 t$. С помощью тригонометрическнх тождеств (прнведенных в [107, p. 92]) можно выразнть этн степенн н пронзведення через трнгонометрические функцнн от велнчнн, кратных t. Подставляя этн выражения в днфференциальное уравненне (13.55), получаем

$$\partial^3 F_1/\partial t^3 + \partial F_1/\partial t = 2(dA/d\tilde{t})\cos t + 2(dB/d\tilde{t})\sin t - dC/d\tilde{t} - \\ - A\cos t - B\sin t - C + 3Q[\tfrac{1}{4}A^3 + \tfrac{1}{4}AB^2 + AC^2]\cos t + \\ + 3Q[\tfrac{1}{4}B^3 + \tfrac{1}{4}A^2B + BC^2]\sin t + Q[\tfrac{3}{2}A^2C + \tfrac{3}{2}B^2C + C^3] + \\ + \tfrac{1}{4}Q[A^3 - 3AB^2]\cos 3t + \tfrac{3}{4}Q[A^2B - B^3]\sin 3t + \tfrac{3}{2}Q[A^2C - B^2C]\cos 2t + \\ + 3Q\,ABC\sin 2t. \tag{13.59}$$

Далее, еслн бы коэффнцненты в уравнении (13.59) прн $\cos t$, $\sin t$ н членах, не завнсящих от t, в совокупностн не обращались в нуль, то велнчина F_1 не

была бы периодической по t, как предполагается. С другой стороны, коэффициенты при $\cos 3t$, $\sin 3t$, $\cos 2t$ и $\sin 2t$ в правой части (13.59) не обязательно обращаются в нуль.

Таким образом, приравнивание нулю суммы коэффициентов при $\cos t$, $\sin t$ и членах, не зависящих от t в правой части уравнения (13.59), дает три условия для периодичности величины F_1 по t. Эти три условия представляют собой три дифференциальных уравнения относительно $\tilde{t}$ для трех величин $A(\tilde{t})$, $B(\tilde{t})$, и $C(\tilde{t})$ [см. выражение (13.56)]. Два из этих дифференциальных уравнений легко объединить в одно относительно величины $R(\tilde{t})$, определенной соотношением (13.58). В результате имеем два следующих дифференциальных уравнения:

$$dR/d\tilde{t} - R + 3Q[R^2/4 + RC^2] = 0, \tag{13.60}$$

$$dC/d\tilde{t} + C - Q[\tfrac{1}{2}RC + C^3] = 0. \tag{13.61}$$

Эти уравнения описывают нарастание колебаний с точностью до 1-го порядка относительно ε.

Осциллятор будет совершать установившиеся колебания (предельный цикл), если $dR/d\tilde{t} = 0$ и $dC/d\tilde{t} = 0$, и в таком случае движение будет строго периодическим, а нарастание колебаний прекратится. Существуют четыре решения уравнений (13.60) и (13.61) при $dR/d\tilde{t} = 0$ и $dC/d\tilde{t} = 0$, которые соответствуют (в принципе) четырем предельным циклам:

$$\text{I. } R = 0, C = 0,$$

$$\text{II. } C = 0, R = 4/(3Q);$$

$$\text{III. } R = 0, C = \pm 1/Q^{1/2};$$

$$\text{IV. } R = 8/(15Q), C = \pm\, 1/(5Q)^{1/2}.$$

Предельный цикл I представляет собой статический случай ($\xi = 0$). Очевидно, что этот случай является предельным циклом, хотя и вырожденным. Предельный цикл III соответствует случаю постоянного смещения, что непосредственно следует из исходного дифференциального уравнения (13.49).

Но являются ли все эти четыре предельных цикла устойчивыми? Если какой-либо из них неустойчив, то он осуществляется в природе лишь на некоторое время, если вообще осуществляется. Чтобы исследовать устойчивость предельных циклов, вернемся к дифференциальным уравнениям (13.60) и (13.61) для скоростей изменения, характеризующих амплитуду параметров R и C, и линеаризуем их относительно соответствующих значений R и C для предельных циклов (ниже будем обозначать эти предельные значения индексом 0). Полученные линеаризованные уравнения запишем в виде одного матричного уравнения

$$dX/d\tilde{t} = \mathcal{N}X, \tag{13.62}$$

где

$$X \equiv \begin{pmatrix} \delta R \\ \delta C \end{pmatrix}, \tag{13.63}$$

$$\mathcal{N} \equiv \begin{pmatrix} 1 - \tfrac{3}{2}QR_0 - 3QC_0^2 & -6QR_0C_0 \\ \tfrac{3}{2}QC_0 & -1 + \tfrac{3}{2}QR_0 + 3QC_0^2 \end{pmatrix}. \tag{13.64}$$

Величина δR, например, — это разность между реальным значением R и значением R_0 для предельного цикла.

Определяя затем собственные значения матрицы $\mathcal{N}$, получаем ответ на вопрос об устойчивости предельных циклов. Если V_i — собственный вектор матрицы $\mathcal{N}$, соответствующий собственному значению λ_i, то

$$\mathcal{N}V_i = \lambda_i V_i. \tag{13.65}$$

Решение уравнения (13.62) для произвольного момента времени $\tilde{t}$ равно

$$X(\tilde{t}) = \sum \alpha_i V_i \exp[\lambda_i \tilde{t}], \tag{13.66}$$

где α_i — постоянные коэффициенты (мы пренебрегаем здесь возможностью того, что некоторые λ_i могут быть равны друг другу; в таком случае соответствующие величины $\alpha_i V_i$ следовало бы заменить полиномами по $\tilde{t}$). Собственные значения матрицы $\mathcal{N}$ получаются из решения характеристического уравнения

$$|\mathcal{N} - \lambda \mathcal{I}| = 0, \tag{13.67}$$

где прямые скобки означают определитель соответствующей матрицы, причем λ — это число, а $\mathcal{I}$ — единичная матрица. Если в уравнение (13.67) подставить выражение (13.64) для матрицы $\mathcal{N}$, то получается простое квадратное уравнение относительно собственного значения λ. Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda = \pm(1 - 3QR_0 + \tfrac{9}{4}Q^2R_0^2 - 6QC_0^2 + 9Q^2C_0^4)^{1/2}. \tag{13.68}$$

Корни уравнения (13.67) либо чисто вещественные, либо чисто мнимые. Следует отметить, что существование положительного вещественного значения λ сразу означает неустойчивость.

Можно показать, что устойчивым является только предельный цикл IV, и, по-видимому, именно он может осуществляться в природе (если $\varepsilon > 0$). С точностью до первого порядка относительно ε этот предельный цикл характеризуется смещением

$$\xi = (8/15Q)^{1/2}\cos(t + \phi) \pm 1/(5Q)^{1/2} + \varepsilon F_1(t, \tilde{t}), \tag{13.69}$$

где F_1 определяется, как и выше, членами ближайшего более высокого порядка по ε.

Отметим, что ε вообще не появляется в нулевом приближении предельного цикла; ε определяет только время ($\sim\varepsilon^{-1}$ периодов), необходимое для достижения этого предельного цикла. Отметим также, что, как и следует ожидать, предельный цикл зависит от Q (коэффициента, определяющего вклад членов третьего порядка в выражении для ξ): амплитуда предельного цикла увеличивается с уменьшением Q. Наконец, укажем, что с точностью до нулевого порядка относительно ε не происходит никаких изменений периода. Этот результат справедлив только при определенной амплитуде, поскольку,

как отмечено выше, только решение нулевого порядка является решением линейного адиабатического волнового уравнения.

Предельные циклы других осцилляторов были рассмотрены Мелвином в ряде неопубликованных исследований [368].

Конечно, в случае реальной звезды ситуация оказывается несравненно более сложной. Неясно даже, насколько хорошо рассмотренная однозонная модель (или вообще любая однозонная модель) описывает реальную звезду. Единственной точкой соприкосновения с действительностью служит, вероятно, то, что в моделях реальных пульсирующих звезд, по-видимому, часто устанавливается режим колебаний типа предельного цикла. Устойчивость подобных режимов исследовал Стеллингверф [546, 547].

Часть III

НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗВЕЗД

В этой частн мы будем нзучать более общие внды колебанин, чем чнсто радиальные пульсацин, рассмотренные вч. II. Смещенне тнпнчного элемента массы нз невозмущенного положения может теперь пронсходнть в пронзвольном направленнн, а не обязательно вдоль раднус-вектора, проведенного нз центра звезды. Поэтому для полного определення такого смещення требуются трн чнсла вместо одного, достаточного в простом случае чнсто раднальных пульсацнй. В результате теорня нераднальных колебаннй оказывается значнтельно более сложной, чем теорня раднальных пульсаций. В основном по этой прнчнне первая нз теорнй разработана гораздо менее детально, чем вторая. Однако благодаря своей общиостн теорня нераднальных колебаннй потенцнально дает значнтельно лучшее прнблнженне к реальным колебанням звезд, и поэтому она гораздо эффективнее, чем более простая н ограниченная теорня чнсто раднальных пульсаций. Напрнмер, в рамках данной теорнн могут быть учтены такне эффекты (напрнмер, вращение нлн магнитные поля звезд), которые, возможно, прнводят к появленню в звезде некоторого предпочтнтельного направлення.

Однако в этой частн кнnгн мы будем заннматься в основном звездами, в которых подобные эффекты отсутствуют. (Некоторые эффекты вращення, магннтных полей н т.п. будут опнсаны в гл. 19.) Таким образом, в данной частн мы рассмотрнм главным образом те звезды, которые в невозмущенном (неосцнллнрующем) состояннн являются сферическн снмметрнчнымн, находятся в состояннн покоя н гидростатнческого равновесня н не обладают крупномасштабнымн магннтнымн полями. Кроме того, мы будем пренебрегать молекулярной н лучнстой вязкостью н турбулентностью, а также будем предполагать, что прнменнмы уравнення нерелятнвнстской механнкн н ньютоновской теорни тяготення.

В гл. 14 — 16 мы прнведем довольно общие свойства нераднальных звездных колебаннй. Так, в гл. 14 будет выведено нелннейное векторное уравненне третьего порядка (по временн) в частных пронзводных, которое описывает нелннейные нераднальные неаднабатнческие двнжения. В остальных же главах этой частн, за нсключеннем некоторых разделов гл. 19, мы будем рассматрнвать только такне колебання, которые настолько малы, что прнменнма лннейная теорня (гл. 5).

Еслн колебання предполагаются еще н адиабатнческими, то уравнення можно объедннить в одно линейное аднабатнческое волновое уравнение, ко-

торое является обобщением на нерадиальные колебания соответствующего уравнения радиальных пульсаций (гл. 8). В гл. 15 будет показано, что это уравнение можно записать в операторной форме, причем оператор, входящий в это уравнение, оказывается самосопряженым, как и в случае радиальных пульсаций. Это линейное адиабатическое волновое уравнение, которое, как и в прошлом, служит основой большинства исследований, посвященных нерадиальным колебаниям звезд, будет подробно рассмотрено в гл. 17. Поскольку эта глава написана в основном в 1976 — 1977 гг., она не отражает более поздних результатов, представленных, например, в статьях Кристенсен-Далсгаарда [86], Сибахаси [507] и Вольфа [626] или в книге Унно и др. [593].

В гл. 16 мы покажем, что линеаризованное уравнение энергии (гл. 9) применимо не только к радиальным, но и к нерадиальным колебаниям звезд. В этой главе мы покажем также, что к нерадиальным колебаниям применимы и интегральные выражения типа полученных в гл. 9 для радиальных пульсаций. Конечно, всюду в этой главе необходимо сохранять в уравнениях неадиабатические члены, которые в гл. 15 и 17 отбрасываются. Результаты гл. 16 служат обоснованием общепринятых методов оценки вибрационной устойчивости нерадиальных колебаний звезд.

В гл. 18 мы рассмотрим в рамках линейной теории задачу нерадиальных неадиабатических звездных пульсаций. И наконец, в гл. 19 мы коротко остановимся на некоторых разнообразных вопросах теории звездных пульсаций, как радиальных, так и нерадиальных.

В 1979 г. Унно, Осаки, Андо и Сибахаси опубликовали прекрасную монографию [593] о нерадиальных колебаниях звезд.

ГЛАВА 14

ОБЩЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе мы объединим уравнения неразрывности, импульса и энергии в одно нелинейное векторное дифференциальное уравнение третьего порядка (по времени) в частных производных, которое описывает общие нелинейные неадиабатические движения в сплошной невязкой среде. Хотя это уравнение мало пригодно для изучения звездных пульсаций, само его существование заслуживает внимания. Оно является нерадиальным аналогом уравнения (6.13) для чисто радиальных движений.

Начнем с уравнения импульса в представлении Эйлера [см. уравнение (4.17)], в котором использовано предположение, что тензор напряжений сводится к чисто гидростатическому термодинамическому давлению (разд. 4.2в). Разделив (4.17) на плотность ρ, подействуем на все члены этого уравнения оператором субстанциональной производной и получим

$$d^2\mathbf{v}/dt^2 = \rho^{-2}(d\rho/dt)\nabla P - \rho^{-1}d(\nabla P)/dt + d\mathbf{f}/dt. \qquad (14.1)$$

С помощью операторного соотношения (4.1) можно записать

$$\frac{d}{dt}(\nabla P) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla P) + \mathbf{v}\cdot\nabla(\nabla P) = \nabla(\partial P/\partial t) + \mathbf{v}\cdot\nabla(\nabla P). \qquad (14.2)$$

Последний член этого выражения исключим с помощью тождества

$$\nabla(\mathbf{v}\cdot\nabla P) = \mathbf{v}\cdot\nabla(\nabla P) + (\nabla P)\cdot\nabla\mathbf{v} + (\nabla P)\times(\nabla\times\mathbf{v}). \tag{14.3}$$

Один из членов этого тождества можно объединить с первым членом в последнем равенстве в (14.2), и полученное выражение опять с учетом операторного соотношения (4.1) будет включать dP/dt вместо $\partial P/\partial t$. Далее, dP/dt можно исключить с помощью уравнения энергии в форме (4.30а) [см. также (4.40)]. В результате получаем

$$d^2\mathbf{v}/dt^2 = \rho^{-2}(d\rho/dt)\nabla P - \rho^{-1}\nabla[(\Gamma_1 P/\rho)d\rho/dt] -$$
$$- \rho^{-1}\nabla[\rho(\Gamma_3 - 1)(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F})] + \rho^{-1}(\nabla P)\cdot\nabla\mathbf{v} + \rho^{-1}(\nabla P)\times(\nabla\times\mathbf{v}) + d\mathbf{f}/dt. \tag{14.4}$$

Величины $\rho^{-1}(\nabla P)$ и $\rho^{-1}(d\rho/dt)$ можно исключить, используя соответственно уравнение импульса (4.17) и уравнение неразрывности (4.5). Таким образом, уравнение (14.4) можно записать окончательно в следующем виде:

$$d^2\mathbf{v}/dt^2 - (d\mathbf{v}/dt - \mathbf{f})\cdot[(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{I} - \nabla\mathbf{v}] +$$
$$+ (d\mathbf{v}/dt - \mathbf{f})\times(\nabla\times\mathbf{v}) - \rho^{-1}\nabla(\Gamma_1 P\nabla\cdot\mathbf{v}) - d\mathbf{f}/dt =$$
$$= \rho^{-1}\nabla[\rho(\Gamma_3 - 1)(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F})], \tag{14.5}$$

где $\mathbb{I}$ — единичный тензор. Это и есть искомое обобщение уравнения (6.13), описывающего радиальное движение, на нерадиальный случай. Отметим, что неадиабатические члены входят только в правую часть уравнения (14.5).

Можно показать, что если $\mathbf{f}$ — сила на единицу массы, обусловленная собственной гравитацией, то в случае чисто радиального движения уравнение (14.5), как и следовало ожидать, сводится к уравнению (6.13).

ГЛАВА 15

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЛИНЕЙНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим нерадиальные колебания столь малой амплитуды, что к ним применима линейная теория (гл. 5). Кроме того, здесь мы ограничимся анализом колебаний, которые являются еще и адиабатическими. Мы увидим, что при таких предположениях линеаризованные уравнения можно объединить в одно *линейное адиабатическое волновое уравнение*. Оно является нерадиальным аналогом соответствующего уравнения для чисто радиальных колебаний, довольно подробно рассмотренного в гл. 8. Это нерадиальное уравнение обладает рядом интересных и полезных свойств, которые и будут описаны в данной главе.

Нерадиальное линейное адиабатическое волновое уравнение будет выведено в разд. 15.1, где приведены и некоторые другие полезные результаты. Ряд интересных и полезных свойств этого уравнения будет получен и обсужден в разд. 15.2 для одного важного частного случая, который охватывает почти все, что представляет какой-либо интерес для теории нерадиальных звездных колебаний. Еще более общий случай будет кратко рассмотрен в разд. 15.3.

Некоторые выводы, полученные в этом разделе, будут использованы в других главах данной части книги.

15.1. Введение

Напомним сначала линеаризованные уравнения неразрывности, импульса и энергии, причем последнее уравнение — для частного случая адиабатических колебаний. Уравнение неразрывности возьмем в форме (5.29б), а уравнение импульса — в форме (5.32). Если единственной объемной силой является собственная гравитация (как мы будем предполагать всюду в данной главе, если не оговорено особо), то полная объемная сила на единицу массы равна $\mathbf{f} = -\nabla\psi$, где ψ — гравитационный потенциал (разд. 4.5). Наконец, линеаризованное уравнение энергии для адиабатических колебаний — это уравнение (5.36а).

Каково выражение для эйлеровой вариации ψ' гравитационного потенциала? Прежде всего напомним, что сам гравитационный потенциал является решением уравнения Пуассона (4.42). Решение этого уравнения в интегральной форме дается выражением (4.43). Если теперь каждый элемент массы переместить в новое положение $\mathbf{x} + \delta\mathbf{r}$, то вклад в потенциал в точке $(\mathbf{r}, t)$ элемента массы dm' составит $-Gdm'/|\mathbf{x} + \delta\mathbf{r} - \mathbf{r}|$. Следовательно, новый потенциал в точке $(\mathbf{r}, t)$ также будет определяться выражением (4.43), только вместо $\mathbf{x}$ в знаменателе будет стоять $\mathbf{x} + \delta\mathbf{r}$. Вспоминая смысл эйлеровой вариации и учитывая, что смещение $\delta\mathbf{r}$ бесконечно мало, имеем

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = -G\int_V \{\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)\cdot\nabla_\mathbf{x}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1})\}\rho_0(\mathbf{x}, t)d\tau', \qquad (15.1)$$

где $\nabla_\mathbf{x}$ означает, что пространственные производные в операторе градиента следует брать по координатам точки $\mathbf{x}$. Интегрируя выражение (15.1) по частям и заменяя один из появляющихся объемных интегралов на поверхностный интеграл с помощью теоремы Гаусса — Остроградского, получаем

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = -G\oint_S \frac{\rho_0(\mathbf{x}, t)[\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)]\cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} + G\int_V \frac{\nabla_\mathbf{x}\cdot[\rho_0(\mathbf{x}, t)\,\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}d\tau', \qquad (15.2)$$

где первый интеграл берется по полной поверхности S рассматриваемой конфигурации. При этом в соответствии с первоначальным решением (4.43) уравнения Пуассона снаружи от поверхности S всюду должно быть $\rho_0 = 0$.

Важное соотношение (15.2) можно получить также и следующим образом. Взяв эйлерову вариацию от уравнения Пуассона, имеем

$$\nabla^2\psi' = 4\pi G\rho'. \qquad (15.3)$$

Формальное решение этого уравнения записывается в следующем виде:

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = -G\int_V \rho'(\mathbf{x}, t)|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1}\,d\tau', \qquad (15.4)$$

где $d\tau'$ — элемент объема в точке $\mathbf{x}$, а интегрирование проводится по всем областям пространства, в которых $\rho' \neq 0$. Однако в более общем случае, когда плотность на поверхности конфигурации не обращается в нуль, но при этом тем не менее существует определенная поверхность, вне которой уже нет вещества (например, в случае жидкого шара или однородной модели звезды), применять выражение (15.4) следует с осторожностью.

В этом случае плотность должна скачкообразно изменяться от некоторого конечного значения непосредственно под воображаемой ограничивающей поверхностью S до нуля с внешней стороны от этой поверхности. Следовательно, эйлерова вариация плотности ρ', хотя она и может быть малой (скажем, первого порядка малости) всюду достаточно глубоко под поверхностью S, но в непосредственной окрестности S она должна быть относительно велика, скажем нулевого порядка. Эта «непосредственная окрестность» поверхности S должна представлять собой некоторую область в виде тонкого слоя (подобного скорлупе вокруг яйца), содержащего поверхность S и окружающего весь объем V, в пределах которого $\rho > 0$. Для каждого момента времени толщина этого слоя определяется тем, насколько поверхность S отклонилась от своей невозмущенной формы.

Очевидно, что в произвольной точке $\mathbf{x}$ в пределах слоя (но не глубже него) максимальное значение вариации $\rho' \approx \rho_S$ — невозмущенному значению плотности на поверхности.

Поэтому интеграл в выражении (15.4) должен состоять из двух членов: интеграла по полному объему V, где $\rho_0(\mathbf{x}, t) \neq 0$, и интеграла по рассмотренному слою, содержащему поверхность S. В линейной теории величина $\rho'(\mathbf{x}, t)$ всюду внутри объема V имеет первый порядок малости, и поэтому там можно использовать линеаризованное уравнение неразрывности (5.29a); кроме того, в качестве объема V можно взять объем невозмущенной системы. Тогда этот первый интеграл будет совпадать с объемным интегралом в выражении (15.2). Во втором же интеграле мы можем с точностью до первого порядка малости использовать соотношение

$$\rho'(\mathbf{x}, t)\, d\tau' = \rho_0(\mathbf{x}_0, t)\, \delta\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'. \tag{15.5}$$

Здесь $\mathbf{x}_0$ — невозмущенное положение элемента жидкости, находящегося на поверхности конфигурации, а $\delta\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. При этом подразумевается, что $\mathbf{x}_0$ — это точка непосредственно под поверхностью S, т.е. ρ_0 в точке $\mathbf{x}_0$ всегда имеет некоторое конечное значение. Кроме того, $\delta\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'$ — это элемент объема вблизи точки $\mathbf{x}$, где вектор $d\mathbf{S}'$ элемента поверхности направлен вдоль внешней нормали. В качестве поверхности S можно взять в первом приближении поверхность невозмущенной конфигурации: тогда второй из рассматриваемых интегралов становится интегралом по (замкнутой) поверхности S и он точно совпадает с поверхностным интегралом в (15.2).

Во многих (практически во всех) случаях, рассматриваемых в данной части, в том числе и в разд. 15.2, плотность ρ_0 на поверхности конфигурации принимается равной нулю. Поэтому поверхностный интеграл в (15.2) обращается в нуль, и мы имеем более простой результат

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = G \int_V \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho_0(\mathbf{x}, t)\, \delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)]\, |\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1}\, d\tau', \tag{15.6}$$

который можно также получить, если взять эйлерову вариацию от решения (4.43) уравнения Пуассона, а затем использовать линеаризованное уравнение неразрывности (5.29а).

Из нулевого значения плотности ρ_0 на поверхности конфигурации вытекает еще одно следствие. Дело в том, что по существу всегда мы будем предполагать, что давление на поверхности конфигурации обращается в нуль, т.е. $P_0 = 0$ и

$$\delta P = 0. \tag{15.7}$$

Используем теперь соотношение (5.16) между лагранжевой и эйлеровой вариациями и выразим ∇P_0 через $d\mathbf{v}_0/dt$ и $\nabla\psi_0$ с помощью невозмущенного уравнения импульса. Мы получаем, что на поверхности конфигурации

$$P' = \rho_0\, \delta\mathbf{r}\cdot(d\mathbf{v}_0/dt + \nabla\psi_0) = 0, \tag{15.8}$$

если ρ_0 на поверхности обращается в нуль и если величина в скобках повсюду имеет конечное значение. Таким образом, одновременное обращение в нуль P и ρ на поверхности означает, что обе вариации, δP и P' также равны нулю на поверхности. Этот вывод будет использован в следующем разделе.

Итак, когда все объемные силы обусловлены собственной гравитацией, то для малых адиабатических колебаний правую часть уравнения импульса [скажем, (5.32)] можно полностью описать на языке поля смещений $\delta\mathbf{r}$ элементов массы. Упомянутое уравнение с представленной таким образом правой частью — это линейное адиабатическое волновое уравнение для нерадиальных колебаний, которое ниже будет служить основой для изложения большинства вопросов. Оно имеет следующий вид:

$$d^2\delta\mathbf{r}/dt^2 = (-\rho^{-1}\nabla P - \nabla\psi)' + \delta\mathbf{r}\cdot\nabla(-\rho_0^{-1}\nabla P_0 - \nabla\psi_0). \tag{15.8'}$$

15.2. Свойства линейного адиабатического волнового уравнения для важного частного случая

Частный случай, рассматриваемый в настоящем разделе (а фактически и в большинстве оставшихся глав), характеризуется следующими предположениями в дополнение к сделанным в начале данной части:

а. Как давление, так и плотность на поверхности конфигурации обращаются в нуль.

б. Невозмущенное (неосциллирующее) состояние системы — это состояние покоя ($\mathbf{v}_0 \equiv 0$) и гидростатического равновесия ($d\mathbf{v}_0/dt \equiv 0$). Отсюда следует, например, что система не вращается.

в. Невозмущенная система является сферически симметричной. (Это предположение естественным образом вытекает из предположения (б), если единственной объемной силой является собственная гравитация.)

Вследствие предположения (б) лагранжева вариация правой части линеаризованного уравнения импульса совпадает с соответствующей эйлеровой вариацией. Следовательно, эту правую часть можно записать в виде линейного оператора $\mathscr{L}$, действующего на $\delta\mathbf{r}$. Имеем [см. уравнение (15.8')]

$$d^2\,\delta\mathbf{r}/dt^2 = -\mathscr{L}(\delta\mathbf{r}), \tag{15.9}$$

причем если $\rho_0 = 0$ иа поверхности коифигурацин [предположенне (а)], то оператор $\mathscr{L}(\delta\mathbf{r})$ прииимает следующую форму:

$$\mathscr{L}(\zeta) = \rho^{-2}(\nabla P)\nabla\cdot(\rho\zeta) - \rho^{-1}\nabla(\zeta\cdot\nabla P) -$$

$$- \rho^{-1}\nabla(\Gamma_1 P\nabla\cdot\zeta) + \nabla\{G\int_V \nabla_{\mathbf{x}}\cdot[\rho(\mathbf{x}, t)\,\zeta(\mathbf{x}, t)]\,|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1} d\tau'\}\ . \quad (15.10)$$

Мы отбросили здесь индекс 0 при равиовесных (невозмущеииых) величииах и для краткости запнсали $\zeta \equiv \delta\mathbf{r}$. Из сотиошеиия (15.10) ясно, например, что оператор $\mathscr{L}$ — линейиый.

Важное свойство оператора $\mathscr{L}$ состоит в том, что он является самосопряженным относительно элемеита массы $\rho d\tau$, как впервые показал Чандрасекар [73, 77]. Это свойство можно выразить следующими соотношениями:

$$\int_V \eta^*\cdot\mathscr{L}(\zeta)\rho d\tau = [\int_V \zeta^*\cdot\mathscr{L}(\eta)\rho d\tau]^* = \int_V \zeta\cdot[\mathscr{L}(\eta)]^*\rho d\tau, \quad (15.11)$$

где ζ и η — два произвольных вектора, достаточно регуляриых как функции пространственных координат, а звездочка означает комплексио сопряжеиную величниу.

Самосопряжеиность оператора $\mathscr{L}$ можно доказать, подставив в первый нитеграл (15.11) выражеиие (15.10) для $\mathscr{L}(\zeta)$ с предварнтельно выделеииымн в ием величниамн ρ', P' и ψ'. Затем выполияется интегрироваиие по частям для тех нитегралов, которые содержат P' и ψ', и используется теорема Гаусса — Остроградского. Оба получаемых поверхностных интеграла равны нулю, поскольку в соответствии со сделанными предположениями P' н ρ на поверхностн конфнгурации обращаются в нуль (см. выше). Подставляя вместо ρ', P' и ψ' выражеиия, получеииые выше, представим интеграл в левой частн (15.11) в вндe суммы пятн объемиых интегралов, однн из которых двойиой. Поскольку оба градиеита ∇P и $\nabla\rho$ иаправлеиы вдоль радиуса [предположение (в)], становится очевидным, что величииы η^* и ζ в этом выражеиин можно произвольио меиять местами. А поскольку оператор $\mathscr{L}$ вещественный, $[\mathscr{L}(\eta)]^* = \mathscr{L}(\eta^*)$, откуда непосредственно следует самосопряжеиность оператора $\mathscr{L}$, выражаемая соотиошением (15.11). В разд. 15.3 мы увидим, что для адиабатических колебаний правую часть лииеаризованиого уравнеиия нмпульса можно записать в самосопряженном виде, даже если предположеиия (а) — (в) ие справедливы.

Из самосопряжеииости оператора $\mathscr{L}$ вытекает ряд важиых следствий, которые мы теперь и рассмотрим. Но сиачала отметим, что если $\mathbf{v}_0 = 0$, как предполагается в даниом разделе, то $d^2/dt^2 = \partial^2/\partial t^2$, н поэтому линейное адиабатическое волиовое уравиеиие можно записать в виде

$$\partial^2(\delta\mathbf{r})/\partial t^2 = -\mathscr{L}(\delta\mathbf{r}). \quad (15.12)$$

Следовательно, если

$$\delta\mathbf{r}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})\exp[i\sigma t], \quad (15.13)$$

то уравиеиие (15.12) становится уравиеиием на собственные значеиия

$$\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \sigma^2\mathbf{u}. \quad (15.14)$$

Здесь величины σ^2 и $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ представляют собой соответственно собственное значение (квадрат угловой частоты колебаний) и собственную функцию, или собственный вектор, оператора $\mathscr{L}$. Рассмотрим теперь следствия самосопряженности оператора $\mathscr{L}$.

1. *Все собственные значения вещественны*. Вещественность σ^2 следует из условия самосопряженности (15.11). Если подставить в него уравнение (15.14) и его комплексно сопряженную форму для k-го собственного значения σ_k^2 и соответствующей собственной функции $\mathbf{u}_k$, то окажется, что σ_k^2 должно совпадать со своей комплексно сопряженной величиной, а это и есть условие вещественности σ_k^2. Поэтому, как и в чисто радиальном случае, движение в нерадиальном случае должно быть либо колебательным с постоянной (во времени) амплитудой, либо должно экспоненциально нарастать с течением времени (что соответствует динамической неустойчивости). Таким образом, комплексных частот для адиабатических колебаний при отсутствии давления на поверхности не существует.

Следует заметить, что вывод о вещественности квадратов собственных частот свободных колебаний звезды зависит от сделанных нами предположений о том, что система в невозмущенном состоянии является статической ($\mathbf{v}_0 = 0$) и находится в гидростатическом равновесии ($d\mathbf{v}_0/dt = 0$), а также о том, что давление обращается в нуль на поверхности. Если бы в невозмущенной системе присутствовали движения или ускорения или если бы давление на поверхности не обращалось в нуль, то подобный вывод, вообще говоря, был бы неверным. Например, хорошо известно (см. ниже и разд. 19.1), что если невозмущенная система вращается, то не обязательно все собственные значения вещественны.

2. *Собственные функции ортогональны между собой относительно элемента массы $\rho d\tau$*. Рассмотрим две моды нерадиальных колебаний, скажем k и l, с собственными функциями $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{u}_l$ и собственными значениями σ_k^2 и σ_l^2. Тогда мы имеем $\mathscr{L}(\mathbf{u}_l) = \sigma_l^2\mathbf{u}_l$ и $[\mathscr{L}(\mathbf{u}_k)]^* = \sigma_k^2\mathbf{u}_k^*$, учитывая при этом вещественность σ_k^2. Подставляя эти соотношения в условие самосопряженности (15.11), получим, что при $\sigma_k^2 \neq \sigma_l^2$

$$\int\limits_V \mathbf{u}_k^* \cdot \mathbf{u}_l \, \rho d\tau = 0 \qquad (k \neq l), \tag{15.15}$$

т.е. собственные функции $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{u}_l$ ортогональны между собой относительно элемента массы $\rho d\tau$. Что касается вырожденного случая ($\sigma_k^2 = \sigma_l^2$), то, как хорошо известно, для него всегда можно построить ортогональную систему функций (см., например, [492, § 10]). Таким образом, даже в этом случае сделанное утверждение справедливо.

3. *Собственные значения подчиняются вариационному принципу.* Впервые это показал Чандрасекар [77]. Мы приведем здесь другое доказательство, следуя работе Линден-Белла и Острайкера [356] и проводя его почти так же, как в чисто радиальном случае, детально рассмотренном в разд. 8.10. Определим вещественное число Σ^2 посредством соотношения

$$\Sigma^2 \int\limits_V \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \rho d\tau \equiv \int\limits_V \mathbf{u}^* \cdot \mathscr{L}(\mathbf{u}) \, \rho d\tau, \tag{15.16}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ — произвольная достаточно регулярная векторная функция $\mathbf{r}$. Пусть функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ испытывает в каждой точке $\mathbf{r}$ малое изменение $\Delta\mathbf{u}$, причем $\mathbf{r}$ и все невозмущенные величины остаются постоянными. Тогда из соотношения (15.16) мы получаем выражение, включающее $\Delta\mathbf{u}$, $\Delta\mathbf{u}^*$, $\Delta\mathscr{L}(\mathbf{u})$ и $\Delta\Sigma$, где $\Delta\Sigma$ — соответствующее изменение числа Σ. Однако из линейности оператора $\mathscr{L}$ следует, что $\Delta\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \mathscr{L}(\Delta\mathbf{u})$. Кроме того, благодаря самосопряженности оператора $\mathscr{L}$ величины $\mathbf{u}^*$ и $\Delta\mathbf{u}$ в этом выражении можно менять местами. Наконец, данное выражение можно сильно упростить, учитывая, что оператор $\mathscr{L}$ и число Σ^2 вещественны. В результате получаем

$$2\Sigma(\Delta\Sigma)\int_V \mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}\rho d\tau + 2\,\mathrm{Re}\Big\{\int_V (\Delta\mathbf{u}^*)\cdot[\Sigma^2\mathbf{u} - \mathscr{L}(\mathbf{u})]\,\rho d\tau\Big\} = 0, \tag{15.17}$$

где $\mathrm{Re}\{\ldots\}$ — вещественная часть соответствующей величины.

Теперь если $\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \Sigma^2\,\mathbf{u}$, то $\Delta\Sigma = 0$ даже при $\Delta\mathbf{u}^* \neq 0$. И обратно, если $\Delta\Sigma = 0$, а величина $\Delta\mathbf{u}^*$ произвольна (но мала), то $\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \Sigma^2\,\mathbf{u}$. Но это как раз и есть линейное адиабатическое волновое уравнение для нерадиальных колебаний, откуда следует $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ и $\Sigma^2 = \sigma_k^2$, т.е. $\mathbf{u}\,(\mathbf{r})$ и Σ^2 должны быть соответственно собственной функцией и собственным значением этого уравнения. Итак, мы доказали следующее: те решения уравнения $\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \Sigma^2\mathbf{u}$, для которых величина Σ имеет экстремум ($\Delta\Sigma = 0$) относительно произвольно малых изменений функции $\mathbf{u}\,(\mathbf{r})$, являются *собственными функциями* $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$, а связанные с этими решениями собственные значения — соответствующими *адиабатическими собственными значениями* σ_k^2 для k-й моды.

Однако этот вариационный принцип не столь полезен, как в случае чисто радиальных колебаний. Причина здесь заключается главным образом в том, что уравнения линейных адиабатических нерадиальных колебаний не образуют системы уравнений Штурма — Лиувилля, как подчеркивается в гл. 17. Следовательно, однозначное и простое упорядочение собственных значений невозможно, а поэтому для произвольной заданной моды нельзя заранее сказать, является ли соответствующий экстремум минимумом или максимумом. В случае чисто радиальных колебаний мы имеем уравнения типа Штурма — Лиувилля, что позволяет однозначным образом упорядочить моды и в результате доказать, что экстремум для основной моды является минимумом (разд. 8.10).

Следует отметить, что если в невозмущенном состоянии системы присутствуют движения (такие, как вращение), то рассмотренный вариационный принцип необходимо несколько видоизменить (разд. 19.1).

Кроме того, к нерадиальным колебаниям звезд применимо некоторое соотношение период — средняя плотность, аналогичное соотношению для радиальных колебаний. Этот вывод следует просто из анализа размерности, например, для интегрального выражения (15.16), определяющего периоды нерадиальных колебаний. Однако, как мы увидим ниже (гл. 17), произведение (период)$^2\cdot$(средняя плотность) для таких колебаний может быть гораздо более чувствительным к строению звезды (например, к относительной концентрации вещества к звездному центру), чем в случае радиальных колебаний.

15.3. Более общий случай

Более общий случай, который мы обсудим в этом разделе, относится к линейным адиабатическим колебаниям, но в нем не учитываются три предположения, сделанные в разд. 15.2. Поэтому в рассматриваемых здесь системах плотность на поверхности не обязательно обращается в нуль (но давление на поверхности по-прежнему принимается равным нулю), в них могут присутствовать произвольные скорости (и ускорения), и они не обязательно должны быть сферически симметричными. Частным случаем здесь является вращающаяся звезда, вращение которой может быть медленным или быстрым, твердотельным или дифференциальным.

Впервые малые адиабатические колебания вращающейся звезды рассмотрел Клемент [100]. Чандрасекар и Лебовиц [80] заметили, что свойство самосопряженности сохраняется, даже если не делать предположения об обращении в нуль плотности на поверхности. Смейерс [525] показал, что вариационный принцип, рассмотренный Чандрасекаром и Лебовицем [80], даже для нерадиальных колебаний эквивалентен принципу Гамильтона в классической механике. Линден-Белл и Острайкер [356] провели более общее и более строгое исследование по сравнению с работой [100]; они уделили особое внимание более общему случаю. Мы не будем здесь излагать деталей этой работы, поскольку она вполне доступна и интересующийся читатель может к ней обратиться.

В рассматриваемом случае лагранжева и эйлерова вариации правой части линеаризованного уравнения импульса [скажем, уравнения (5.32)] не равны друг другу. Запишем это уравнение в следующем виде:

$$d^2\,\delta\mathbf{r}/dt^2 = -\vec{\mathscr{P}}(\delta\mathbf{r}) - \vec{\mathscr{V}}(\delta\mathbf{r}), \tag{15.18}$$

где $\vec{\mathscr{P}}$ и $\vec{\mathscr{V}}$ — линейные векторные операторы. Если единственной объемной силой является собственная гравитация, то мы имеем

$$\vec{\mathscr{P}}(\boldsymbol{\zeta}) \equiv (\rho^{-1}\,\nabla P)' + \boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla(\rho^{-1}\,\nabla P), \tag{15.19а}$$

$$\vec{\mathscr{V}}(\boldsymbol{\zeta}) \equiv \nabla\psi' + \boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla(\nabla\psi), \tag{15.19б}$$

где вариации давления P предполагаются адиабатическими. Обратите внимание, что правая часть уравнения (15.18) совпадает с правой частью уравнения (15.8′). Оказывается справедливым важный результат, впервые доказанный Линден-Беллом и Острайкером [356]: операторы $\vec{\mathscr{V}}$ и $\vec{\mathscr{P}}$ являются самосопряженными [в смысле уравнения (15.11)], причем для самосопряженности $\vec{\mathscr{P}}$ требуется, чтобы давление обращалось в нуль на поверхности конфигурации *.

---

* Операторы, введенные Линден-Беллом и Острайкером [356], отличаются от приведенных нами на множитель ρ — плотность невозмущенной (неосциллирующей) конфигурации. Говоря конкретнее, мы имеем, например, $\vec{\mathscr{P}}_{[356]} = \rho\vec{\mathscr{P}}_{\mathrm{Cox}}$, где $\vec{\mathscr{P}}_{\mathrm{Cox}}$ определяется выражением (15.19а). Однако это различие в определениях не приводит к различиям в конечных результатах, поскольку определение самосопряженности, принятое в [356], отличается от нашего [см. соотношение (15.11)] как раз на множитель ρ.

Однако следует подчеркнуть, что хотя для малых адиабатических колебаний правая часть линеаризованного уравнения импульса (15.18) даже в этом более общем случае может быть представлена как самосопряженный оператор, не обязательно все собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения являются вещественными, что и было показано в [356] (см. также разд. 19.1).

ГЛАВА 16
НАРАСТАНИЕ ИЛИ ЗАТУХАНИЕ МАЛЫХ НЕРАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В этой главе в рамках линейной теории рассматривается задача о нарастании или затухании нерадиальных колебаний звезд. Мы используем два подхода: один преимущественно физический (разд. 16.1), а другой более формальный (разд. 16.2). Оба подхода приводят к одному и тому же результату — выражению для коэффициента устойчивости (разд. 9.1) в случае нерадиальных колебаний. По своей форме это выражение совпадает с соответствующим выражением для случая чисто радиальных колебаний (9.13).

Всюду в этой главе мы используем три основных предположения, сформулированных в разд. 15.2.

16.1. Линеаризованное уравнение энергии

В настоящем разделе мы покажем, что «линеаризованное» уравнение энергии (фактически оно является уравнением второго порядка), которое было выведено в разд. 9.1 для чисто радиальных колебаний звезд [см. уравнение (9.3)], оказывается в точности справедливым и для колебаний общего вида (т.е. нерадиальных). Этот вывод позволяет физически обосновать выражения, используемые при расчете нарастания или затухания колебаний, а также способствует более ясному пониманию общих вопросов.

Согласно трем предположениям, сделанным в разд. 15.2, $\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$ и $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t \equiv \dot{\mathbf{v}}$. А тогда линеаризованное уравнение движения — это уравнение (5.31), в котором $\mathbf{f}' = -\nabla\psi'$, где ψ' — эйлерова вариация гравитационного потенциала. Мы будем обычно отбрасывать индекс 0 у невозмущенных величин и использовать стандартные обозначения (см. предыдущие главы).

Если в уравнении (5.31) выразить P' через δP с помощью соотношения (5.16) между эйлеровой и лагранжевой вариациями, то получим

$$\dot{\mathbf{v}} = -\rho^{-1}\nabla\delta P + \rho^{-1}\nabla(\delta\mathbf{r}\cdot\nabla P) + (\rho'/\rho^2)\nabla P - \nabla\psi'. \tag{16.1}$$

Теперь скалярно умножим это уравнение на $\rho d\tau\mathbf{v}$ ($d\tau$ — элемент объема) и проинтегрируем по всему объему конфигурации. Два первых члена в правой части можно затем проинтегрировать по частям и использовать теорему Гаусса — Остроградского. В результате правая часть будет состоять из шести интегралов, в том числе двух поверхностных. Однако поверхностные интегралы обращаются в нуль, так как на поверхности в соответствии с наши-

мн предположениями $\delta P = 0$, а поскольку $\rho = 0$, то и $\nabla P = 0$. Поэтому нмеем следующее уравнение:

$$\int_V \rho \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}\, d\tau = -\int_V (\delta P/\rho)(d\delta\rho/dt)d\tau + \int_V (1/\rho)(\delta\mathbf{r}\cdot\nabla P)(d\delta\rho/dt)d\tau + \\ + \int_V (\rho'/\rho)\mathbf{v}\cdot\nabla P d\tau - \int_V \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\psi'\, d\tau. \tag{16.2}$$

Рассмотрим второй интеграл в правой частн. Преобразуем его, как при интегрнрованин по частям (только в данном случае отиосительио времеииóй переменной t) н выиесем оператор d/dt за зиак интеграла, что допустнмо благодаря условию сохраиеиия массы [$d(\rho d\tau)/dt = 0$; см. гл. 4]. Кроме того, нспользуем соотношение $d(\delta\mathbf{r})dt = \delta\mathbf{v} = \mathbf{v}$ и тот факт, что в остальиых интегралах, появившихся в результате такого преобразования, иевозмущеииые величииы не зависят от времени. Далее, в одном нз этих интегралов запишем $\delta\rho = \rho' + \delta\mathbf{r}\cdot\nabla\rho$, а в другом $\delta\rho = -\rho\nabla\cdot\delta\mathbf{r}$. Еще раз проделаем такую же операцию (отиосительио t) и учтем, что в сферической звезде векторы $\nabla\rho$ и ∇P направлены вдоль раднуса. В результате получнм

$$\int_V (1/\rho)(\delta\mathbf{r}\cdot\nabla P)(d\delta\rho/dt)d\tau = -\frac{d}{dt}\int_V (\nabla\cdot\delta\mathbf{r})(\delta\mathbf{r}\cdot\nabla P)d\tau - \\ - \int_V (\rho'/\rho)(\mathbf{v}\cdot\nabla P)d\tau - \frac{d}{dt}[\tfrac{1}{2}\int_V (1/\rho)(\delta\mathbf{r}\cdot\nabla\rho)(\delta\mathbf{r}\cdot\nabla P)d\tau]. \tag{16.3}$$

Рассмотрим теперь последний интеграл в уравиеиии (16.2). Проинтегрируем его по частям, нспользуя теорему Гаусса — Остроградского, условие $\rho = 0$ на поверхности, а также лиregistered линеаризованиое уравнение иеразрывиости. Кроме того, учтем результаты разд. 15.1. В итоге найдем

$$-\int_V \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\psi'\, d\tau = d[\tfrac{1}{2}G\int_V\int_V \rho'(\mathbf{r}, t)\rho'(\mathbf{x}, t)|\mathbf{x}-\mathbf{r}|^{-1}\, d\tau'\, d\tau]/dt, \tag{16.4}$$

где $d\tau'$ — элемент объема в точке $\mathbf{x}$.

Наконец, рассмотрим первый нитеграл в правой частн уравиеиня (16.2). Исключим из него δP с помощью термоднна́мического тождества (5.35а), преобразуем пронзводную по времени так же, как н во втором интеграле, и нспользуем линеарнзованное уравиение иеразрывиости в виде $\delta\rho = -\rho\nabla\cdot\delta\mathbf{r}$. Тогда получим

$$-\int_V (\delta P/\rho)(d\delta\rho/dt)d\tau = -d[\tfrac{1}{2}\int_V \Gamma_1 P(\nabla\cdot\delta\mathbf{r})^2 d\tau]/dt - \\ - \int_V (\Gamma_3 - 1)T\delta s[d(\delta\rho/\rho)/dt]\rho d\tau. \tag{16.5}$$

Объедиияя все приведеииые результаты н сравнивая их с уравиением (15.10), вндим, что можио записать следующее:

$$d\left(\int_V \tfrac{1}{2}\rho\dot{v}^2 d\tau + \tfrac{1}{2}\int_V \delta\mathbf{r}\cdot\mathscr{L}(\delta\mathbf{r})\rho d\tau\right)/dt = \\ = -\int_V (\Gamma_3 - 1)T\,\delta s[d(\delta\rho/\rho)/dt]\rho d\tau, \tag{16.6}$$

где $\mathscr{L}$ — самосопряжениый лииейиый оператор, введеииый в гл. 15, а s — удельиая зитропня.

В завершеиие рассмотреиия остается выясиить физический смысл величииы $\frac{1}{2} \int\limits_V \delta\mathbf{r} \cdot \mathscr{L}(\delta\mathbf{r}) \rho\, d\tau$.

Отметим сначала, что величииа $-\mathscr{L}(\delta\mathbf{r})$, согласно уравиению (15.9), — это лагранжева вариация полиой силы, действующей иа едииицу массы в точке $\mathbf{r}$ в момеит t н обусловлеииой полем адиабатических лагранжевых смещеиий $\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \equiv \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$. (Еслн в невозмущенном состояннн отсутствуют ускорения, то зта величииа является н эйлеровой вариацией полной силы.) Рассмотрим теперь прнращения $d\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ в смещеннях злемеитов массы. При таких приращеииях работа, совершеииая рассматриваемыми силами во всей системе, равиа

$$dW = - \int\limits_V (d\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathscr{L}(\boldsymbol{\eta}) \rho\, d\tau. \tag{16.7}$$

Но оператор $\mathscr{L}$ самосопряженный. Учнтывая это обстоятельство, вынося оператор d за знак интеграла (поскольку $d(\rho\, d\tau) = 0$) н нитегрнруя по полиым смещеииям $\delta\mathbf{r}$, получим следующее выражение для полиой работы, совершеииой рассматриваемыми силами при смещеииях $\delta\mathbf{r}$:

$$W = - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\delta\mathbf{r}} d \int\limits_V \boldsymbol{\eta} \cdot \mathscr{L}(\boldsymbol{\eta}) \rho\, d\tau = - \frac{1}{2} \int\limits_V \delta\mathbf{r} \cdot \mathscr{L}(\delta\mathbf{r}) \rho\, d\tau. \tag{16.8}$$

Эта работа является коисервативиой в том смысле, что ее величина ие зависит от траекторий, по которым достигиуты коиечные зиачеиия смещеиий. Следовательно, оиа обладает свойствами потеициальиой зиергни. И действительно, замечая, что потенциальная энергия равиа работе, совершенной против сил, действующих в системе, можио записать $W = -\delta\Phi$, где

$$\delta\Phi \equiv \frac{1}{2} \int\limits_V \delta\mathbf{r} \cdot \mathscr{L}(\delta\mathbf{r}) \rho\, d\tau \tag{16.9}$$

есть полиая потенциальная эиергия системы в возмущенном состоянии (для адиабатических смещений), принятая равной нулю, когда любые смещеиия отсутствуют. Такнм образом, величина в правой части выражеиия (16.9) имеет в общем случае нераднальных колебаний звезд тот же физический смысл, что и в случае чисто радиальиых смещеиий. Варнация $\delta\Phi$ оказывается величиной второго порядка малостн, потому что вариация первого порядка тождествеино обращается в иуль, если иевозмущенная система иаходится в гидростатическом равиовесии.

Теперь можио дать фнзическую иитерпретацию интегральиого выражения (15.16) для собствеииого зиачеиия σ^2 иерадиальиых адиабатических колебаиий [Σ^2 в (15.16) становнтся собственным значением σ^2, если $\mathbf{u}$ — собствеииая

функция]. Если записать $\delta\mathbf{r} = \mathbf{u}\cos(\sigma t + \phi)$, то точно тем же путем, как в гл. 8 для чисто радиальных колебаний, мы приходим к следующим результатам:

$$\overline{\delta\mathscr{T}} = \tfrac{1}{4}\sigma^2 \int_V \mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}\,\rho d\tau, \tag{16.10}$$

$$\overline{\delta\Phi} = \tfrac{1}{4} \int_V \mathbf{u}^*\cdot\mathscr{L}(\mathbf{u})\rho\, d\tau, \tag{16.11}$$

где $\delta\mathscr{T}$ — вариация полной кинетической энергии системы, а черта означает усреднение по периоду рассматриваемой моды. Таким образом, физический смысл уравнения (15.16) состоит в том, что, как и в случае радиальных пульсаций,

$$4\overline{\delta\mathscr{T}} = 4\overline{\delta\Phi}. \tag{16.12}$$

Возвращаясь теперь к линеаризованному уравнению энергии, имеем

$$d\delta\Psi/dt = -\int_V (\Gamma_3 - 1)T\,\delta s[d(\delta\rho/\rho)/dt]\rho d\tau, \tag{16.13}$$

где $\delta\Psi$ $(= \delta\mathscr{T} + \delta\Phi)$ — полная энергия пульсаций, а $\delta\mathscr{T}$ — полная кинетическая энергия пульсаций [см. уравнение (16.6)]. Выразив в (16.13) производную по времени от $\delta\rho$ через производные от δs и от произведения $\delta s\,\delta\rho$, а затем проинтегрировав по всему периоду в предположении, что в конце периода система возвращается в исходное состояние, и разделив на период Π, получаем следующее выражение для средней скорости изменения $\delta\Psi$ за период:

$$\langle d\delta\Psi/dt\rangle = (1/\Pi)\int_0^{\Pi} dt \int_V (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F})\rho d\tau. \tag{16.14}$$

Здесь использовано соотношение (7.10), справедливое для термодинамически обратимых процессов.

Итак, результат, полученный в гл. 9 для чисто радиальных колебаний [см. уравнение (9.3)], в точности справедлив и для нерадиальных колебаний. Уравнение (16.14) служит физической основой для рассмотрения устойчивости этих колебаний, т.е. их затухания или нарастания (разд. 16.2), совершенно так же, как и уравнение (9.3) в случае радиальных пульсаций.

16.2. Интегральные выражения для собственных значений

В этом разделе мы покажем, что для собственных значений линейных нерадиальных колебаний существуют интегральные выражения, полностью аналогичные полученным в разд. 9.3 для радиальных пульсаций. Эти интегральные выражения позволяют вывести соотношение для коэффициента устойчивости (обратно пропорционального времени изменения амплитуды пульсаций в e раз) в случае нерадиальных колебаний. В свете результатов

предыдущего раздела подобное заключенне, вероятно, не является удивнтельным. Как н выше, мы будем нспользовать трн предположення, сделанные в разд. 15.2.

Поскольку скорость в невозмущенном состояннн системы прннята равной нулю, нет ннкакого различня между операторами d/dt н $\partial/\partial t$, а поэтому линеарнзованное уравненне двнжения можно записать в следующем внде:

$$\partial^2\delta\mathbf{r}/\partial t^2 = -\mathscr{L}(\delta\mathbf{r}) - \rho^{-1}\nabla[\delta P - (\Gamma_1 P/\rho)\delta\rho], \tag{16.15}$$

где $\mathscr{L}$ — лннейный оператор, введенный в гл. 15. Второй член в правой частн представляет собой вклад из-за неаднабатнчности.

Проднфференцируем теперь (16.15) по временн н учтем, что невозмущенные величнны от временн не завнсят. Пронзводную по временн от неаднабатнческого члена определнм с помощью линеаризованного уравнення энергнн в форме (5.34а).

Далее, предположнм, что

$$\delta\mathbf{r}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})\exp[i\omega t] \tag{16.16}$$

н прнмем такую же завнсимость от времени для другнх пульсационных переменных. Тогда проднфференцнрованное по временн уравненне (16.15) будет нметь внд

$$-i\omega^3\mathbf{u} + i\omega\mathscr{L}(\mathbf{u}) = -\rho^{-1}\nabla\{\rho(\Gamma_3 - 1)[\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F})]_{\text{sp}}\}, \tag{16.17}$$

где нндекс sp обозначает пространственную часть соответствующей велнчнны. Умножнм теперь уравненне (16.17) скалярно на $\mathbf{u}^*\rho d\tau$ н проннтегрнруем по всему объему V конфнгурацнн. В правой частн проведем интегрнрованне по частям н нспользуем теорему Гаусса — Остроградского, в результате чего появнтся поверхностный ннтеграл. Однако еслн плотность на поверхности конфнгурацин равна нулю, то этот ннтеграл обращается в нуль. Кроме того, во втором ннтеграле, получнвшемся при нntегрированнн по частям, нспользуем лннеарнзованное уравненне неразрывностн

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^* = -(\delta\rho/\rho)^*_{\text{sp}}. \tag{16.18}$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$J \equiv \int_V \mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}\,\rho d\tau, \tag{16.19}$$

$$J\Sigma^2 \equiv \int_V \mathbf{u}^*\cdot\mathscr{L}(\mathbf{u})\rho d\tau, \tag{16.20}$$

$$C \equiv \int_V (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)^*_{\text{sp}}[\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F})]_{\text{sp}}\,\rho d\tau. \tag{16.21}$$

В результате получим

$$i\omega(\omega^2 - \Sigma^2) = C/J. \tag{16.22}$$

По своей форме это точно такое же кубнческое уравненне для собственного значення ω, как н в случае чнсто раднальных колебаний [см. уравнение (9.43)].

Следовательио, весь аналнз этого уравнения, проведенный в гл. 9 (явные формулы для ω и т.д.),можно непосредственно перенести на случай нерадиальных колебанні. Однако следует нметь в внду замечанне, высказанное Леду н Вальравеном [345, p.552]*.

В частностн, когда велнчнна $|C/J|$ мала по сравнению с любым отдельным членом в левой частн (16.22), решенне для амплнтуды колебанні имеет вид

$$\delta \mathbf{r}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \exp[\pm i\sigma t - \varkappa t], \tag{16.23}$$

где σ (вещественная часть ω) $\approx \Sigma = 2\pi/\Pi$, н эта велнчнна представляет собой угловую частоту колебаний, $\varkappa$ — коэффнциент устойчивости, прнблнженно определяемый выражеиием (9.13), в котором C дается формулой (16.21). Велнчнны C_r (вещественая часть C) и J часто вычнсляют с нспользованием аднабатнческнх собственных функцнй в подынтегральных выражениях. Такой подход называется квазнадиабатическим прнблнженнем, н он зачастую дает довольно точные результаты.

ГЛАВА 17

ЛИНЕЙНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗД

В этой главе мы рассмотрим малые нераднальные колебання сферическнх звезд относнтельно их равновесных состоянні. Кроме того, всюду, за нсключеннем разд. 17.1 — 17.4 н 17.14, мы будем предполагать, что колебання являются еще н аднабатическнмн, т.е. удовлетворяют уравненням (5.36а) и (5.36б). Даже в таком прнблнженнн задача оказывается математически весьма сложной. Еще более трудная задача малых неаднабатнческнх нерадиальных колебанні будет кратко рассмотрена в гл. 18.

Еслн ие указано особо, то для равновесных состоянні, относнтельио которых, по предположенню, совершаются колебання, мы будем нспользовать трн допущення, принятые в гл. 15. Дополннтельно предположнм существование теплового равновесня ($\varepsilon_0 - dL_{r,0}/dm = 0$) н будем пренебрегать любымн нзменениями химического состава, которые могут быть следствнем ядерных превращеиий.

Многие нз общих замечанні, сделанных в начале гл. 8 относнтельно малых радиальиых адиабатнческих колебаний звезд, прнменнмы и к более общему случаю нераднальных колебаний.

---

* Леду и Вальравеи [345] указывают, что когда соотиошеиия, получеииые при иитегрировaнии диффереициальных уравнеиий, рассматриваются как алгебраические уравиеиия для собствениых зиачеиий, к нх аиализу следует подходить осторожио. Леду и Вальравеи приводят следующий пример, осиовываясь иа уравиеиях лииейиых адиабатических иерадиальиых колебаиий в приближеиии Каулиига [см. ииже уравиеиня (17.84а) и (17.84б)]. Если умиожить (17.84а) иа w, а (17.84б) иа v [где w и v определяются соотиошениямн (17.83)], сложить оба уравнення н пронитегрнровать от $r = 0$ до $r = R$, то получнтся квадратное уравненне относительио σ^2, одио из решений которого ие имеет фнзнческого смысла, н его необходнмо отбросить. — *Прим. перев.*

В разд. 17.1 — 17.4 мы рассмотрим в осиовиом общие физические и математические поиятия, используемые при изучеиии иерадиальиых колебаний. В этнх разделах не оговаривается, что колебания являются адиабатическимн, ио такое предположеиие сделано в разд. 17.5 — 17.13.

Методы вычнслеиия адиабатическнх собствеииых зиачеиий и собствеииых функций для моделей общего вида приводятся в разд. 17.5, а в разд. 17.6 рассматриваются граничиые условия. Однородиая сжимаемая модель — одиа из иемногих, которые можно исследовать аналитически, — кратко обсуждается в разд. 17.7. В разд. 17.8 описываются некоторые основные свойства нерадиальиых адиабатических колебаний звезд н приводятся иекоторые числеииые результаты для простых моделей. Для достаточио сложиых звездиых моделей определениые свойства колебаний оказываются качествеиио ииыми, и иесколько этих различий рассматривается в разд. 17.10 и 17.11. В разд. 17.9 описывается и обсуждается важиое приближеиие, в котором преиебрегается возмущеииями гравитациоииого потенциала (приближеиие Каулиига). Разд. 17.12 посвящен иерадиальиым колебаииям звезд в очень высоких модах. Использованне весовых функцнй Эпстейна в прнложенин к иераднальиым звездным колебаииям обсуждается в разд. 17.13. Накоиец, в разд. 17.14 опнсываются некоторые методы расчета характерного времени затухаиня иерадиальиых колебаний н приводится иесколько соответствующих результатов.

Превосходные обзоры иерадиальиых колебаний сделаиы Леду [338, 339]; см. также обзор Кокса [136]. Несколько детальиых разработок и методов представлеиы в [86, 507, 626]. Уиио, Осаки, Андо и Сибахасн опубликовалн прекрасиую монографию [593], также посвященную иерадиальиым колебаниям звезд.

17.1. Основные уравнения

Необходимые лииеаризоваииые уравиеиия — это уравиеиия иеразрывиости, импульса, энергни, уравнеиие геиерации н переиоса эиергии и уравиеиие Пуассоиа. Первые три из иих — это уравиеиия (5.29а), (5.31) [в котором $\mathbf{v} = \mathbf{v}' = \delta\mathbf{v} = d(\delta\mathbf{r})/dt$] и (5.35а) соответствеиио. Используя соотиошение (5.16) между эйлеровой н лагранжевой вариациями, легко показать, что для моделей, которые в иевозмущеиином состояиии являются сферическими и находятся в гидростатическом равиовесии, уравиеиие импульса справедливо и в том случае, если в ием всюду эйлеровы вариации замеиить лаграижевымн. Как обычио, эйлеровы вариацин будем обозначать штрихами и отбросим индекс 0 у иевозмущеииых велнчии.

Уравиеине геиерации и переиоса эиергии имеет следующий вид:

$$T d\delta s/dt = \delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla\cdot\mathbf{F}), \tag{17.1}$$

где ε и $\mathbf{F}$ — соответствеиио скорость геиерации термоядериой эиергин на едииицу массы и суммариый вектор теплового потока, учитывающий в прииципе все мехаиизмы, которые могут виосить вклад в переиос тепла (мы подразумеваем здесь термодинамически обратимые процессы), а δs — лагранжева вариацня удельиой энтропии s. Правая часть уравиеиия (17.1) обыч-

но зависит от $\delta\mathbf{r}$ и ρ', T' и $\nabla T'$, а также от других параметров и связана с конкретными механизмами генерации энергии и переноса тепла. В разд. 17.14 будут приведены явные выражения для $\delta[(\nabla\cdot\mathbf{F})/\rho]$ в случае лучистого переноса.

Уравнение Пуассона иногда удобнее рассматривать как два дифференциальных уравнения первого порядка, а не как одно уравнение второго порядка. По определению гравитационного потенциала ψ сила тяготения $\mathbf{f}$ на единицу массы равна

$$\mathbf{f} = -\nabla\psi, \tag{17.2}$$

а уравнение Пуассона устанавливает, что

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = -\nabla^2\psi = -4\pi G\rho. \tag{17.3}$$

Соответствующие уравнения для эйлеровых вариаций получают просто добавлением штрихов к $\mathbf{f}$, ψ и ρ в (17.2) и (17.3).

Сначала запишем уравнение импульса в виде, удобном для нашего последующего изложения [345, § 74]. После некоторых преобразований, объединяя это уравнение с линеаризованным уравнением энергии, получаем для сферической звезды

$$d^2\delta\mathbf{r}/dt^2 = -\nabla(P'/\rho + \psi') + \mathbf{A}(\Gamma_1 P/\rho)\nabla\cdot\delta\mathbf{r} - (\Gamma_3 - 1)T\delta s\nabla\rho/\rho, \tag{17.4}$$

где

$$\mathbf{A} \equiv \rho^{-1}\nabla\rho - (\Gamma_1 P)^{-1}\nabla P. \tag{17.5}$$

Физическая интерпретация важной величины A (радиальной составляющей вектора $\mathbf{A}$, единственной составляющей, если звезда сферически симметрична) будет дана в следующем разделе.

Для адиабатических колебаний $\delta s = 0$, и мы просто отбрасываем последний член в уравнении (17.4). Если не оговаривается особо, то в настоящей главе мы будем подразумевать именно такие колебания.

Если звезда в невозмущенном состоянии находится в гидростатическом равновесии (и потому является сферической), то $(P'/\rho + \psi')$ можно заменить на $(\delta P/\rho + \delta\psi)$.

17.2. Обсуждение величины $\mathbf{A}$

В случае сферически симметричной звезды единственным компонентом вектора $\mathbf{A}$ является его радиальная составляющая:

$$A = \rho^{-1}\,d\rho/dr - (\Gamma_1 P)^{-1}dP/dr. \tag{17.6}$$

Все величины в этом уравнении относятся к равновесному (или невозмущенному) состоянию и зависят только от радиального расстояния r. Физический смысл величины A легко понять из следующего рассуждения, опирающегося на превосходное и ясное изложение этого вопроса в работах [580, 581].

Рассмотрим стратифицированную жидкость, в которой P, ρ и Γ_1 зависят только от r, и представим себе, что элемент жидкости, который первоначально находился на уровне r_0, перемещен в новое положение $r_0 + \delta r$ (рис. 17.1).

Предположнм, что элемент всегда сохраняется как целое н не перемешивается с окружающей средой. Обозначнм через $\Delta\rho(r)$ разность на произвольном уровне r между плотностью элемента $\rho_{el}(r)$ н плотностью окружающей среды $\rho_{surr}(r)$ в непосредственной блнзостн от элемента:

$$\Delta\rho(r) \equiv \rho_{el}(r) - \rho_{surr}(r). \tag{17.7}$$

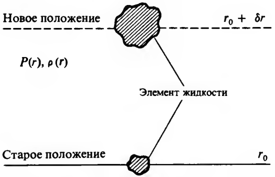


РИС. 17.1. Смещение элемеита жидкости из положения r_0 в положение $r_0 + \delta r$ в стратифицированной среде.

В общем случае $\Delta\rho$ состонт из двух слагаемых. Одно нз ннх, скажем $\Delta_1\rho$, обусловлено попросту тем, что в невозмущенной жидкостн плотность меняется от точкн к точке. Для малых смещенний δr это слагаемое дается следующим выраженнем:

$$\Delta_1\rho = -\delta r\, d\rho/dr, \tag{17.8}$$

где пронзводная берется от распределення плотностн в окружающей среде н вычнсляется на уровне r_0. Знак минус появляется потому, что рассматрнваемое слагаемое всецело определяется нзмененнем $\rho_{surr}(r)$ с расстояннем r, т.е. плотность $\rho_{el}(r)$ считается здесь постоянной. Второе слагаемое является результатом возможной сжимаемости жндкостн н учнтывает нзмененне $\rho_{el}(r)$ с r. Еслн давленне внутрн элемента в его новом положеннн отлнчается от давлення в нсходном положенни, то объем элемента в новом положеннн может отлнчаться от его нсходного объема. Если предположнть, что элемент двигался к своему новому положенню достаточно медленно, то он всегда будет находнться в равновеснн с окружающей средой, т.е. давленне внутрн элемента всегда будет равно внешнему давленню. Кроме того, еслн бы прн двнженнн не пронсходнло теплообмена между элементом н окружающей средой (по существу, такая снтуацня могла бы возннкнуть прн достаточно быстром движении элемента), то элемент двнгался бы аднабатически. В этом случае разность плотностей между элементом н окружающей средой могла бы возннкнуть просто потому, что давленне в невозмущенной жндкости меняется от точкн к точке н что жидкость может быть сжимаемой. С точностью до малых велнчнн первого порядка эта разность была бы равна

$$\Delta_2\rho = \delta r (d\rho/dP)_{ad}\, dP/dr, \tag{17.9}$$

где $(d\rho/dP)_{ad} = (\rho/P)/\Gamma_1$ — производная от ρ по P вдоль адиабаты (разд. 4.2в), а производная dP/dr от давления окружающей среды должна быть вычислена на уровне r_0. Случай несжимаемой жидкости можно было бы рассмотреть, просто полагая $\Gamma_1 = \infty$, что дает $\Delta_2\rho = 0$ (однако см. ниже).

Таким образом, при смещении элемента на расстояние δr в стратифицированной жидкости полный избыток его плотности относительно плотности окружающей среды равен

$$\Delta\rho = \Delta_1\rho + \Delta_2\rho = -\rho[\rho^{-1}d\rho/dr - (\Gamma_1 P)^{-1}\, dP/dr]\delta r = -\rho A\,\delta r. \qquad (17.10)$$

[Легко видеть, что в линейном приближении $\Delta\rho$ — это как раз эйлерова вариация плотности ρ, обозначенная ρ' в гл. 5, а $\Delta_2\rho$ — лагранжева вариация $\delta\rho$; в том же приближении первое равенство — это просто соотношение (5.16) между обоими типами вариаций.] Тогда *выталкивающая сила* f_B, действующая на рассматриваемый элемент и отнесенная к единице объема, с точностью до малых величин первого порядка равна

$$f_B = -g\Delta\rho = \rho g\, A\, \delta r, \qquad (17.11)$$

где $g \equiv Gm(r)/r^2$ — локальное ускорение силы тяжести [G — гравитационная постоянная, $m(r)$ — масса, заключенная внутри сферы радиуса r]. Далее, если f_B и δr имеют противоположные знаки, то выталкивающая сила будет стремиться вернуть элемент на его первоначальный уровень и жидкость будет *конвективно устойчивой*. Поэтому из уравнения (17.11) вытекает условие устойчивости относительно конвекции

$$A < 0, \qquad (17.12)$$

тогда как условие $A > 0$ соответствует конвективной неустойчивости. Таким образом, величина A является локальным критерием конвективной устойчивости.

В случае конвективной устойчивости и в отсутствие теплообмена, трения и т.п. элемент будет совершать простое гармоническое движение относительно исходного уровня. Угловая частота N такого колебательного движения определится, если записать $f_B = -\rho N^2\,\delta r$, откуда

$$N^2 = -Ag. \qquad (17.13)$$

Величину N обычно называют *частотой Брунта — Вяйсяля*.

Результат (17.13) легко получить более формально на основании разд. 17.1. Если давление внутри элемента всегда равно давлению окружающей среды, то $P' = 0$. Кроме того, в описанной простой картине, очевидно, пренебрегают возмущением ψ'. Пренебрежем также величиной δs, запишем $\delta P = \delta\mathbf{r}\cdot\nabla P$, используем адиабатическое соотношение между δP и $\delta\rho$ [уравнение (5.36а)] и вспомним, что $(\nabla P)/\rho = -\mathbf{g}$ (ускорение силы тяжести), поскольку невозмущенная жидкость по предположению находится в гидростатическом равновесии. Мы получаем

$$d^2\delta\mathbf{r}/dt^2 = -\mathbf{A}\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{g} = \mathbf{A}\delta r g, \qquad (17.14)$$

где $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$, если вектор $\mathbf{g}$ направлен вдоль радиуса к центру, а δr — ради-

альная составляющая смещения $\delta\mathbf{r}$. Записывая $\delta r \propto \exp[iNt]$, сразу получаем результат (17.13). В случае несжимаемой жидкости, для которой $\delta\rho = 0$, более прямой способ — это вернуться к уравнению (5.31), снова пренебречь возмущениями P' и ψ' и записать $\rho' = -\delta\mathbf{r}\cdot\nabla\rho$. Тогда уравнение (17.13) получается так же, как и выше, только $\mathbf{A}$ заменяется на $(\nabla\rho)/\rho$ — значение $\mathbf{A}$ при $\Gamma_1 = \infty$. Дальнейшее рассмотрение можно найти в разд. 17.12.

[Интересно отметить два свойства уравнения (17.13) в случае несжимаемой жидкости, т.е. когда вместо A подставлено $(d\rho/dr)/\rho$. Во-первых, $N^2 > 0$ (что соответствует колебательному режиму), только если $d\rho/dr < 0$, т.е. только если плотность возрастает вглубь (мы всегда предполагаем, что ускорение силы тяжести $\mathbf{g} \neq 0$ и направлено вниз). Если же плотность возрастает наружу, что имело бы место, если бы тяжелая жидкость находилась над более легкой, то $N^2 < 0$, и это соответствует динамической неустойчивости. Следовательно, такая стратификация неустойчива. Этот тип неустойчивости иногда называют неустойчивостью Рэлея — Тейлора (см., например, книгу Чандрасекара [72, Ch. X]). Ясно, что неустойчивость Рэлея — Тейлора будет существовать при $d\rho/dr > 0$ и в случае сжимаемой жидкости, поскольку для системы, находящейся в гидростатическом равновесии, второй член во втором равенстве в уравнении (17.10) всегда вносит положительный вклад в значение A. Во-вторых, при $d\rho/dr = 0$, т.е. для однородной жидкости (когда плотность по всему объему системы одинакова), частота $N = 0$, что соответствует бесконечно большому периоду. Такая жидкость будет находиться в *безразличном равновесии* относительно рассмотренного здесь вида возмущений, и смещенные из состояния равновесия элементы жидкости не будут осциллировать. По существу, именно этот вывод объясняет, почему в однородном несжимаемом шаре не существуют g-моды нерадиальных колебаний (см. [136, 338]; определение g-мод см. в разд. 17.7)].

Величина A тесно связана с обычным критерием конвективной устойчивости, введенным К.Шварцшильдом [499]. Действительно, легко показать (см., например, [146, Ch. 13]), что в случае неоднородного химического состава, непрерывно изменяющегося в пространстве,

$$A = \lambda_P^{-1}(\chi_T/\chi_\rho)[\nabla - \nabla_{ad} + (\chi_\mu/\chi_T)(d\ln\mu/d\ln P)]. \tag{17.15}$$

Здесь μ — средняя молекулярная масса, $\lambda_P \equiv -(d\ln P/dr)^{-1}$ — высота однородной атмосферы, χ_ρ и χ_T были определены в разд. 4.2в, а

$$\chi_\mu \equiv (\partial \ln P/\partial \ln\mu)_{\rho,\,T}. \tag{17.16}$$

Кроме того, введены обозначения

$$\nabla \equiv (d\ln T/d\ln P), \qquad \nabla_{ad} \equiv (\partial \ln T/\partial \ln P)_{s,\,\mu}, \tag{17.17}$$

где ∇ — истинный логарифмический градиент температуры в звезде, взятый относительно давления, а ∇_{ad} — логарифмический адиабатический градиент.

Наконец, полезно заметить, что в случае однородного химического состава (μ постоянно по звезде) величина A служит еще и индикатором того, возрастает или убывает (локально) удельная энтропия в звезде в направлении от центра. Примем, например, для простоты, что $d\ln P$ равно изменению $\ln P$,

связанному с приращением dr в звезде в раднальном направленнн от центра. Используя хорошо нзвестное термодннамическое тождество, нмеем тогда следующее выражение:

$$A = -[(\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2](\rho T/P)(ds/dr), \tag{17.18}$$

которое показывает, что в тех областях, где удельная энтропня s возрастает наружу, $A < 0$ (что соответствует устойчнвостн относнтельно конвекцин), н обратно.

17.3. Представление переменных, связанных с возмущениями, с помощью сферических гармоник

Сначала запншем уравненне нмпульса (17.4) через компоненты вектора $\delta\mathbf{r}$ в сфернческой снстеме координат:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_r \delta r + \mathbf{e}_\theta \delta t_\theta + \mathbf{e}_\phi \delta t_\phi, \tag{17.19}$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ — безразмерные единнчные векторы сфернческой снстемы коордннат (рнс. 6.1), δr — раднальный компонент вектора $\delta\mathbf{r}$, а δt_θ н δt_ϕ — его трансверсальные компоненты:

$$\delta t_\theta = r\delta\theta, \quad \delta t_\phi = r \sin\theta \delta\phi, \tag{17.20}$$

прнчем $\delta\theta$ н $\delta\phi$ — соответствующне прнращення полярного н азнмутального углов θ н ϕ. Поскольку предполагается, что невозмущенная снстема находнтся в состояннн покоя, то $d/dt = \partial/\partial t$. Кроме того, мы прннимаем, что все возмущення завнсят от временн по закону $\exp[i\sigma t]$, а значнт, $\partial^2/\partial t^2 = -\sigma^2$, где σ — угловая частота колебаннй. Вспомнная, что для сфернческой звезды вектор $\mathbf{A}$ направлен вдоль раднуса ($\mathbf{A} = A\mathbf{e}_r$), получаем в случае аднабатического двнження следующее представление уравнення нмпульса (17.4) в виде трех скалярных уравнений:

$$\sigma^2 \delta r = \partial\chi/\partial r - A(\Gamma_1 P/\rho)\alpha, \tag{17.21а}$$

$$\sigma^2 \delta t_\theta = r^{-1}\partial\chi/\partial\theta = \partial(\chi/r)/\partial\theta \tag{17.21б}$$

$$\sigma^2 \delta t_\phi = (1/r\sin\theta)\,\partial\chi/\partial\phi = (1/\sin\theta)\,\partial(\chi/r)/\partial\phi, \tag{17.21в}$$

где

$$\alpha \equiv \nabla\cdot\delta\mathbf{r}\,(= -\delta\rho/\rho), \tag{17.22}$$

$$\chi \equiv P'/\rho + \psi'. \tag{17.23}$$

Кроме того, мы часто будем нспользовать выраженне для $\operatorname{div}\delta\mathbf{r}$. С учетом (17.21а) — (17.21в) нмеем

$$\nabla\cdot\delta\mathbf{r} = r^{-2}\partial(r^2\delta r)/\partial r - (\sigma r)^{-2}L^2\chi, \tag{17.24}$$

где оператор L^2 нногда называют оператором Лежандра:

$$L^2 \equiv -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{17.25}$$

Обычно предполагают, что всякая переменная, связанная с возмущением, обусловлена некоторой «нормальной модой» колебаний, и каждую нормальную моду рассматривают так, как будто существует только она одна. В большинстве приложений предполагается, что такая мода описывается произведением функции, зависящей только от r, и функции, зависящей только от полярного и азимутального углов θ и ϕ. Эта вторая функция принимается пропорциональной сферической гармонике $Y_l^m(\theta, \phi)$. (Хорошее краткое изложение свойств сферических гармоник содержится в книгах [108, р. 52 — 53; 461, р.414]; более подробную информацию можно найти, например, в [285, гл. 2 и 3].) Величина l — это степень сферической гармоники, принимающая целочисленные положительные значения, включая нуль: $l = 0, 1, 2, \ldots$. Для каждого значения l существует $2l + 1$ возможное значение m: $m = -l, -l + 1, \ldots, l - 1, l$; порядок сферической гармоники m иногда называют азимутальным индексом сферической гармоники *.

Цель этих замечаний — подчеркнуть, что сферические гармоники являются *собственными функциями* оператора L^2 с *собственными значениями* $l(l + 1)$:

$$L^2\, Y_l^m(\theta, \phi) = l(l + 1)\, Y_l^m(\theta, \phi) \tag{17.26}$$

(см., например, [235]). Кроме того, в предположении $\chi \propto Y_l^m$ уравнение (17.24) преобразуется к виду

$$\alpha = \nabla \cdot \delta \mathbf{r} = -\delta\rho/\rho = r^{-2}\, \partial(r^2 \delta r)/\, \partial r - l(l + 1)(\sigma r)^{-2} \chi \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17.27}$$

Это выражение для $\operatorname{div}\delta\mathbf{r}$ справедливо как для адиабатических, так и для неадиабатических колебаний.

Случай $l = 0$ соответствует чисто радиальным колебаниям.

Укажем также, что выражения для обоих трансверсальных компонентов δt_θ и δt_ϕ не содержат при таком описании никаких дополнительных функций, как видно из вторых равенств в (17.21б) и (17.21в). Этот результат является простым следствием уравнения импульса (17.4), согласно которому вектор ускорения элемента массы представляется в виде суммы градиента скалярной функции χ и чисто радиального вектора (для сферической звезды).

Для последующего изложения целесообразно получить общее выражение для дивергенции эйлеровой вариации $\mathbf{f}'$ ($\mathbf{f}$ — произвольный вектор), которая в сферической системе координат имеет вид

$$\mathbf{f}' = f_r' \mathbf{e}_r + f_\theta' \mathbf{e}_\theta + f_\phi' \mathbf{e}_\phi \tag{17.28}$$

(подобные рассуждения применимы и к лагранжевой вариации $\delta\mathbf{f}$). Однако для векторов, которые равны сумме градиента скалярной функции и чисто радиального вектора, оба трансверсальных компонента определяются, очевидно, производными по углам от одной и той же функции, которую часто

* Символ m не должен вносить путаницы, несмотря на его использование в других разделах книги для обозначения лагранжевой массовой переменной. Смысл символа m поясняется всякий раз, когда он встречается, или же понятен из контекста.

называют тангенциальным компонентом и которую мы будем обозначать здесь f'_t [примером служат уравнения (17.21б) и (17.21в)]. Таким образом, $f'_\theta = \partial f'_t/\partial\theta$, $f'_\phi = (\sin\theta)^{-1}\,\partial f'_t/\partial\phi$. Если f'_t представляет собой произведение функции, зависящей только от r, и сферической гармоники Y_l^m, то можно записать также

$$f'_\theta = f'_t\,(1/Y_l^m)\,\partial Y_l^m/\partial\theta, \qquad f'_\phi = f'_t\,(1/Y_l^m)(1/\sin\theta)\,\partial Y_l^m/\partial\phi. \tag{17.29}$$

Следовательно, вектор $\mathbf{f}'$ можно представить в виде

$$\mathbf{f}' = f'_r\,\mathbf{e}_r + f'_t\mathbf{t}, \tag{17.30}$$

где $\mathbf{t}$ — вектор, лежащий в касательной плоскости (перпендикулярной радиус-вектору):

$$\mathbf{t} \equiv \mathbf{e}_\theta\,(1/Y_l^m)\,\partial Y_l^m/\partial\theta + \mathbf{e}_\phi\,(1/\sin\theta)(1/Y_l^m)\,\partial Y_l^m/\partial\phi, \tag{17.31}$$

причем этот вектор не является единичным. Таким образом, имеем

$$\nabla\cdot\mathbf{f}' = r^{-2}\,\partial(r^2 f'_r)/\partial r - r^{-1}\,l(l+1)f'_t. \tag{17.32}$$

При сравнении (17.32) с (17.27) видно, что тангенциальный компонент вектора $\delta\mathbf{r}$, скажем δt, равен

$$\delta t = \chi/(\sigma^2 r) \tag{17.33}$$

[величина χ определена соотношением (17.23)], а θ- и ϕ-компоненты даются соотношениями (17.29).

Отметим, что в виде произведения сферической гармоники и функции, зависящей только от r, записываются лишь скалярные переменные, связанные с возмущениями.

Стоит упомянуть частный, но важный случай, когда $\mathbf{f}'$ равно градиенту скалярной функции H, которая в свою очередь равна произведению сферической гармоники и функции только от r, например

$$\mathbf{f}' = \nabla H, \tag{17.34}$$

или

$$\mathbf{f}' = \mathbf{e}_r f'_r + \mathbf{t}\,f'_t, \tag{17.35}$$

где векторы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{t}$ определены выше и

$$f'_r = \partial H/\partial r, \qquad f'_t = H/r. \tag{17.36}$$

Выражение (17.34) представляет собой частный случай *теоремы Гельмгольца*, которая утверждает, что произвольный вектор (удовлетворяющий определенным довольно слабым математическим требованиям, см., например, [444, p. 158]) можно записать в виде суммы градиента скалярного потенциала и ротора векторного потенциала.

Следует отметить, что пропорциональность возмущения сферической гармонике подразумевает существование азимутальной бегущей волны, фазовая скорость которой равна

$$d\phi/dt = -\sigma/m. \tag{17.36'}$$

Полезио также привести результат действия оператора Лапласа $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ на функцию $y(r, \theta, \phi)$, образованную произведением Y_l^m и функции только r:

$$\nabla^2 y = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} y = r^{-1}\,\partial^2(ry)/\,\partial r^2 - l(l+1)r^{-2}y. \quad (17.37)$$

Описанное разделеиие перемеииых, иа котором осиовано практически все рассмотрение нерадиальиых колебаний звезд, определяет класс сфероидальиых мод. Вектор $\delta\mathbf{r}$, представляющий смещение элемента массы, удовлетворяет в этом классе мод при $\sigma^2 \neq 0$ соотиошеиию

$$(\nabla \times \delta\mathbf{r})_r \equiv 0, \quad (17.38)$$

где индекс r обозначает радиальиую составляющую.

Второй класс — крутильиые моды — может быть представлеи следующими компоиеитами смещеиий:

$$\delta r = 0, \quad (17.39а)$$

$$\delta t_\theta = [T_{l,\,m}(r)/r\,\sin\theta](\partial Y_l^m/\,\partial\phi)\,\exp[i\sigma t], \quad (17.39б)$$

$$\delta t_\phi = -[T_{l,\,m}(r)/r](\partial Y_l^m/\,\partial\theta)\,\exp[i\sigma t], \quad (17.39в)$$

где $T_{l,\,m}(r)$ — произвольиая (ио удовлетворяющая граничным условиям) функция радиуса r. В статической сферической звезде крутильиые моды ие зависят от времеии ($\sigma = 0$) и характеризуются тем, что лаграижевы и эйлеровы вариации давлеиия, плотиости и гравитациоииого потеициала тождествеиио равиы иулю. (Действительно, как показано в работе [12], где дано исчерпывающее рассмотреиие этих мод, для такой звезды не существует крутильиых колебаний с $\sigma \neq 0$.) Эти моды представляют иекоторый вид медлеииого закручиваиия системы. На их существоваиие впервые указал в 1968 г. Пердаиг [436] и обратил особое виимаиие Саймои [521]; см. также книгу Чаидрасекара [72, App. III]. Автор благодарит П.Смейерса (частиое сообщеиие, 1975), привлекшего его виимаиие к этому классу мод. Для таких мод радиальная составляющая вектора $\nabla \times \delta\mathbf{r}$ не равиа иулю ии в одной точке системы:

$$(\nabla \times \delta\mathbf{r})_r = l(l+1)[T_{l,\,m}(r)/r^2]\,Y_l^m\,\exp[i\sigma t]. \quad (17.40)$$

При $l = 1$ крутильиые моды могут быть описаны, согласио [12], выражеиием

$$\delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}\,\exp[i\sigma t], \quad (17.41)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — в общем случае векториая фуикция r. При постояииом $\boldsymbol{\Omega}$ эти моды соответствуют твердотельиому вращеиию с постояииой скоростью.

Обычио считается, что сфероидальные и крутильиые моды образуют вместе полиую систему функций (см., иапример, [203, 290, 521]). Это предположеиие озиачает, что произвольную функцию координат можио представить в виде бесконечиой суммы таких мод.

В иастоящей книге мы ие будем подробно рассматривать крутильиые моды и всегда будем предполагать, если ие оговореио особо, что имеем дело со сфероидальными модами.

В случае вращающейся звезды крутильные моды имеют отличные от нуля частоты и переходят в так называемые «r-моды», введенные в работе [418] *. Частоты крутильных мод отличны от нуля и в случае, когда звездные недра могут испытывать сдвиговые деформации, например, в частично кристаллизовавшемся белом карлике (см. [258]).

17.4. Порядок уравнений и смежные вопросы

Какой порядок по пространственным переменным имеет система дифференциальных уравнений для малых нерадиальных неадиабатических колебаний? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим четыре основных дифференциальных уравнения и перечислим различные неизвестные. Мы имеем следующие уравнения:

Уравнение неразрывности. Это скалярное дифференциальное уравнение первого порядка, в которое входят ρ' и три компонента вектора $\delta\mathbf{r}$ [см., например, (5.29а)].

Уравнение импульса. Это векторное дифференциальное уравнение первого порядка, включающее величины $d^2\delta\mathbf{r}/dt^2$, P', ρ' и ψ' и соответствующее трем скалярным уравнениям первого порядка [см., например, (5.31)].

Уравнение энергии. Вариацию удельной энтропии δs можно исключить из этого уравнения [см., например, (5.35а)], подействовав на него оператором d/dt и подставив уравнение (17.1). В результате получается скалярное дифференциальное уравнение первого порядка (по пространственным переменным), включающее величины P', ρ', ε' и по три компонента векторов $\delta\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}'$. Соотношение между ε', ρ' и T' — это обычно всего лишь алгебраическое уравнение, получаемое из выражения для скорости генерации энергии $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ (см., например, разд. 4.3).

Уравнение потока энергии. В явном виде это уравнение еще не приводилось, поскольку не известно его конкретного представления в наиболее общем случае (когда учитывается конвективный перенос). Однако для случая лучистого переноса (в диффузионном приближении) и при учете теплопроводности это уравнение известно [см., например, (4.41)]. В данном случае можно видеть (разд. 17.14), что уравнение для $\mathbf{F}'$ является векторным дифференциальным уравнением первого порядка, включающим величины ρ', T' и по три компонента векторов $\delta\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}'$, т.е. оно соответствует трем скалярным дифференциальным уравнениям первого порядка. Соотношение между P', ρ' и T' — это обычно всего лишь алгебраическое уравнение, которое можно получить из уравнения состояния вещества, $P = P(\rho, T)$ (см., например, разд. 4.2).

Уравнение Пуассона. Для наших целей это уравнение удобнее рассмотреть как два дифференциальных уравнения первого порядка: одно — векторное уравнение, получаемое, если взять эйлерову вариацию от уравнения (17.2), а другое — скалярное, получаемое при линеаризации уравнения (17.3). Следовательно, уравнение Пуассона эквивалентно четырем скалярным дифферен-

* См. также *Saio H.* Astrophys. J., **256**, 717, 1982. — *Прим. перев.*

циальным уравнениям первого порядка для величины ψ' и трех компонентов вектора $\mathbf{f}'$, представляющего эйлерову вариацию силы гравитации на единицу массы.

Таким образом, зависимыми переменными являются, например, P', ρ', ψ' и три компонента каждого из векторов $\delta\mathbf{r}$, $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{f}'$, т.е. всего 12 скалярных переменных. [Конечно, вместо эйлеровых вариаций в качестве зависимых переменных всегда можно использовать лагранжевы вариации, поскольку есть соотношение (5.16), связывающее оба типа вариаций.] Итак, всего имеется 12 скалярных дифференциальных уравнений первого порядка по пространственным координатам, и поэтому мы имеем систему 12-го порядка. Однако, как мы видели в гл. 9, при неадиабатических колебаниях каждая зависимая переменная должна быть комплексной, т.е. фактически мы имеем систему 24-го порядка в вещественных переменных.

Предположение о том, что каждая скалярная переменная пропорциональна сферической гармонике $Y_l^m(\theta, \phi)$, позволяет исключить шесть переменных (по два компонента векторов $\delta\mathbf{r}$, $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{f}'$) и шесть уравнений: два уравнения импульса, два — потока, и два — ускорения силы тяжести [оба тангенциальных компонента каждого вектора можно представить в виде алгебраических выражений для скалярных переменных, см., например, уравнения (17.21б) и (17.21в)]. Тогда мы получаем систему 6-го порядка в комплексных переменных, или 12-го порядка в вещественных переменных.

Другая точка зрения по этому же вопросу изложена в разд. 18.1.

В адиабатическом приближении уравнение энергии не используется, а поэтому отсутствуют уравнения для потока энергии. Следовательно, система будет лишь 4-го порядка в комплексных переменных. Однако в случае адиабатических колебаний каждую зависимую переменную можно рассматривать как чисто вещественную (гл. 8), т.е. в этом приближении мы имеем фактически систему 4-го порядка в вещественных переменных. Причина, по которой соответствующая задача для радиальных колебаний оказывается задачей только второго порядка, состоит в том, что для таких колебаний уравнение Пуассона допускает тривиальное решение (гл. 6). Далее мы всюду будем рассматривать адиабатические колебания, если не оговорено иначе.

Важно отметить, что поскольку порядок m сферической гармоники не входит ни в одно из уравнений задачи (как адиабатической, так и неадиабатической), собственные значения малых нерадиальных колебаний статических звезд оказываются вырожденными по m: для каждого значения l существует $2l + 1$ значение m. И при отсутствии возмущений, таких, как вращение или магнитные поля (гл. 19), все эти собственные значения для данного l совершенно одинаковы.

Перейдем теперь к описанию общих методов решения.

17.5. Методы решения для моделей общего вида

В этом разделе мы представим некоторые уравнения малых адиабатических нерадиальных колебаний сферических звезд (с учетом предположений,

сделанных в гл. 15) в форме, в которой они использовалнсь для звездных моделей общего внда. Первая форма уравнений (п. 17.5а) опнсана Леду и Вальравеном [345, § 79] н использована, напрнмер, Смейерсом [524]. Вторая форма (п. 17.5б) была выведена Дзембовским [187], и ее использовалн, например, Осакн н Хансен [410].

17.5а. ПЕРВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Чтобы получнть это представленне, объедининм уравнення энергнн н неразрывностн, а также нспользуем уравненне нмпульса для раднальной составляющей поля смещенмй н уравнение Пуассона. Вводя новые переменные

$$u \equiv r^2\, \delta r, \tag{17.42}$$

$$y \equiv P'/\rho, \tag{17.43}$$

легко показать, что все трн уравнения: нмпульса, неразрывностн н уравнение Пуассона соответственно — после некоторых преобразований прнннмают внд

$$dy/dr = [(\sigma^2 + Ag)/r^2]u - Ay - d\psi'/dr, \tag{17.44}$$

$$du/dr = (\rho g/\Gamma_1 P)u + [l(l+1)/\sigma^2 - r^2\rho/\Gamma_1 P]y + [l(l+1)/\sigma^2]\psi', \tag{17.45}$$

$$r^{-2}d\,(r^2 d\psi'/dr)/dr = -(4\pi G\rho A/r^2)u + (4\pi G\rho^2/\Gamma_1 P)\,y + [l(l+1)/r^2]\psi'. \tag{17.46}$$

В этнх уравненнях завнснмые переменные u, y н ψ' рассматриваются как функцнн только от r, т.е. счнтается, что все уравнення сокращены на общнй множитель $Y_l^m(\theta, \phi)$. Очевидно, что этн дифференцнальные уравнення образуют снстему четвертого порядка.

Поскольку этн уравнення прнменнмы, по-вндимому, прн любом значеннн l, онн должны описывать как частный случай аднабатическне чнсто радиальные колебання, характернзуемые значеннем $l = 0$ н подробно рассмотренные в гл. 8. Справедливость данного утверждения была продемонстрнрована в явном внде Смейерсом [524]. Поэтому в дальнейшем большннство замечанй будет ограннчиваться случаем $l > 0$.

17.5б. ВТОРАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Чтобы получнть это представление дифференциальных уравнений (17.44) — (17.46), определнм, согласно Дзембовскому [187], четыре безразмерные завиcнмые переменные

$$y_1 \equiv \delta r/r,\ y_2 \equiv (1/gr)(P'/\rho + \psi'),\ y_3 \equiv (1/gr)\psi',\ y_4 \equiv (1/g)d\psi'/dr, \tag{17.47}$$

где g — локальное ускорение снлы тяжестн. Мы нспользуем также безразмерную угловую частоту Ω [уравненне (8.20)] н определнм безразмерную функцню

$$c_1 \equiv (r/R)^3\, M/m, \tag{17.48}$$

где m — масса внутрн сферы радиуса r. Кроме того, нспользуем безразмерные переменные теорнн внутреннего строення звезд (см., напрнмер, [71])

$$U \equiv d\, \ln m/d\, \ln r, \qquad V \equiv -d\, \ln P/d\, \ln r = gr\rho/P, \tag{17.49}$$

где второе равенство в выраженнн для V относится к сферическнм звездам в

состояиии гидростатнческого равиовесия. Тогда диффереициальиые уравиения (17.44) — (17.46) преобразуются в следующую систему четырех уравнеиий первого порядка:

$$rdy_1/dr = (V/\Gamma_1 - 3)y_1 + [l(l+1)/c_1\Omega^2 - V/\Gamma_1]y_2 + (V/\Gamma_1)y_3, \tag{17.50}$$

$$rdy_2/dr = (c_1\Omega^2 + Ar)y_1 + (1 - U - Ar)y_2 + Ary_3, \tag{17.51}$$

$$rdy_3/dr = (1 - U)y_3 + y_4, \tag{17.52}$$

$$rdy_4/dr = -UAry_1 + (UV/\Gamma_1)y_2 + [l(l+1) - UV/\Gamma_1]y_3 - Uy_4, \tag{17.53}$$

где сиова все уравнеиия уже сокращены иа общий множитель $Y_l^m(\theta, \phi)$.

В приведеииой формулировке представлеиы четыре дифференциальных уравиеиия первого порядка (вместо двух уравиений первого порядка и одиого уравнения второго порядка, как в предыдущей формулировке), поскольку уравнеиие Пуассоиа эквивалеитио двум диффереицнальиым уравиеииям первого порядка (разд. 17.1).

17.6. Граничные условия

В этом разделе мы рассмотрим граннчные условия как в центре (п. 17.6а), так и иа поверхности (п. 17.6б) в случае малых адиабатических колебаний сферических звезд, для которых справедливы все три предположеиия, сделаниые в разд. 15.2. (Одиако для общностн мы ие будем в явном виде предполагать, что плотность иа поверхностн снстемы обращается в иуль.) Мы увидим, н это иеудивительио, что граничиые условия оказываются более сложиыми, чем для чисто радиальиых колебаиий, рассмотреииых в гл. 8. В большей части этого раздела будем прииимать, что $l > 0$. Кроме того, будем использовать преимущественио переменные u, y и ψ', введеииые в разд. 17.5а.

17.6а. ЦЕНТР ЗВЕЗДЫ

Переходя к аналнзу решеиия уравненнй (17.44) — (17.46) вблнзн центра звезды, сиачала заметнм, что в сферической звезде величииы A, g, $d\rho/dr$ и dP/dr вблизи центра пропорциоиальиы r, а величины ρ, P и Γ_1 по мере приближения к центру стремятся к конечным зиачениям. Поэтому при $r \to 0$ величииа Ag в уравиеиии (17.44) стаиовится малой по сравиеиию с σ^2, а второй члеи в квадратиых скобках в уравненни (17.45) становнтся малым по сравнеиию с первым.

Предположнм теперь, что вблизи цеитра справделивы разложеиия

$$y = r^a \sum_{\nu=0}^{\infty} Y_\nu r^\nu, \tag{17.54а}$$

$$u = r^b \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu r^\nu, \tag{17.54б}$$

$$\psi' = r^c \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu r^\nu, \tag{17.54в}$$

где Y_ν, U_ν и Ψ_ν — постоянные, которые надлежит определить, причем предполагается, что все ряды сходятся. Допустим, что по крайней мере две из трех зависимых переменных, скажем δr и P', остаются конечными при $r = 0$. Тогда дифференциальные уравнения требуют, чтобы и третья переменная, в данном случае ψ', также оставалась конечной при $r = 0$, что следует также из физических соображений. Поскольку поведение зависимых переменных вблизи центра ($r = 0$) определяется показателями a, b и c в разложениях (17.54), чтобы удовлетворить этим центральным граничным условиям, мы должны иметь $a \geqslant 0$, $b \geqslant 2$ и $c \geqslant 0$. Из соотношения (17.54а) следует, что при $r \to 0$ $\delta P \propto r^a$, а для адиабатических колебаний и $\rho' \propto r^a$.

Однако поскольку наши зависимые переменные должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, величины a, b и c должны быть связаны друг с другом. Действительно, можно показать, что при $l \neq 0$

$$c = b - 1 = a. \tag{17.55}$$

Подставим теперь разложения (17.54а) — (17.54в) в дифференциальные уравнения (17.44) — (17.46) с учетом соотношения (17.55) и приравняем коэффициенты при наинизших степенях r, считая величины ρ, P и Γ_1 вблизи $r = 0$ постоянными. Получим

$$aY_0 = \sigma^2 U_0 - a\Psi_0, \tag{17.56}$$

$$(a + 1)U_0 = [l(l + 1)/\sigma^2](Y_0 + \Psi_0). \tag{17.57}$$

$$a(a + 1)\Psi_0 = l(l + 1)\Psi_0. \tag{17.58}$$

Последнее условие дает при $l \neq 0$ и при $\Psi_0 \neq 0$

$$a = l,\ -l - 1. \tag{17.59}$$

Уравнения (17.56) и (17.57) приводят к такому же результату, если $U_0 \neq 0$. Значение $a = -l - 1$ следует отбросить, чтобы избежать особенностей в точке $r = 0$. Тогда, чтобы удовлетворить граничным условиям при $r = 0$, разложения (17.54а) — (17.54в) для $l \neq 0$ должны иметь следующий вид:

$$\delta r = r^{l-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu r^\nu, \tag{17.60а}$$

$$P'/\rho = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} Y_\nu r^\nu, \tag{17.60б}$$

$$\psi' = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu r^\nu. \tag{17.60в}$$

Отметим также, что мы имеем следующее условие [см. соотношение (17.56)]:

$$\sigma_0^2 U_0 = l(Y_0 + \Psi_0). \tag{17.61}$$

Следовательно, для заданных σ^2 и l граничные условия в центре оставляют неопределенными две из трех постоянных U_0, Y_0, Ψ_0. Как мы увидим в п. 17.6б, значения двух этих постоянных должны быть выбраны так, чтобы выполнялись граничные условия на поверхности звезды.

В центре звезды существует ннтересная связь между раднальиой (δr) н тангенциальной (δt) составляющимн лагранжева смещеиия $\delta \mathbf{r}$. На осиованнн соотношеиия (17.33) имеем $\delta t = (P'/\rho + \psi')/(\sigma^2 r)$. Подставляя сюда разложеиня (17.60а) — (17.60в), ограничиваясь первыми членами н учнтывая условне (17.61), получаем для $r = 0$

$$\delta t = (\delta r)/l. \tag{17.62}$$

Выражеине (17.62) — это лишь частный случай более общего соотиошеиия, выполияющегося для любого вектора, пропорциональиого градненту скаляриой велнчнны, которая в свою очередь пропорциональна сферической гармонике. Еслн F_t н F_r — тангенциальная н раднальная составляющие такого вектора $\mathbf{F}$ [см. выражеине (17.30)], то более общий результат, получаемый нз требования, чтобы велнчииа $\nabla \cdot \mathbf{F}$ была прн $r = 0$ конечной (см. ниже), состонт в следующем:

$$(F_r/F_t)_{r=0} = l. \tag{17.62$'$}$$

Граннчные условня в центре, получеииые довольио формальио, можно рассмотреть с физической точки зрения. Отметнм, что в данном случае линейных нераднальных адиабатических колебанні фнгурируют лишь два вектора: лагранжево смещенне $\delta \mathbf{r}$ элемента массы н сила, скажем, $\mathbf{f}'$, связаниая с эйлеровой варнацней ψ' гравнтационного потенциала н отнесениая к еднниице массы: $\mathbf{f}' = -\nabla\psi'$. Кроме того, встречаются две дивергенции: $\nabla \cdot \delta\mathbf{r}$ в уравиеннн неразрывностн н $\nabla \cdot \mathbf{f}'$ в уравиеини Пуассона. Тогда требованне, чтобы велнчииы $\delta\rho$ н ρ' оставалнсь конечными прн $r = 0$, прнводит к требоваиню, чтобы обе дивергенцин также оставалнсь конечными в этой точке. Можно показать, что для выполнеиия последиего требовання иеобходимо и достаточно, чтобы поведенне переменных вблизн центра описывалось разложениямн (17.60а) — (17.60в) [см. также соотношенне (17.62$'$)].

Можно заметить, что иерадиальиые колебання ($l > 0$) отлнчаются от раднальиых ($l = 0$) тем, что в цеитре ($r = 0$) обе вариацнн P' н δP должны обращаться в нуль в первом случае, но не во втором. Кроме того, для иерадиальиых колебанні $\delta r = 0$ в точке $r = 0$ только прн $l > 1$. «Днпольная» мода $l = 1$, для которой $\delta r \neq 0$ при $r = 0$, соответствует смещеиию геометрического центра коифигурацин. Для иесжимаемой жидкости этот случай соответствует перемещению всей конфнгурации. Одиако для сжимаемой жидкостн этот случай может соответствовать и такому смещенню, прн котором центр снстемы остается неподвнжным, что впервые показал Смейерс [523] (см. также разд. 17.8). Простой прнмер таких колебанні прн $m = 0$ — это стоящий на льду человек иа коньках, который держит в руках тяжелые гантелн н сгнбает н разгибает обе рукн одновремеино прямо перед собой. В этом случае положенне центра масс человека перноднческн нзменяется, но центр масс снстемы остается неподвнжным. Другой прнмер — человек, расхажнвающий взад н вперед по плоту, плавающему на воде. Для $m = \pm 1$ простой прнмер колебанні с $l = 1$ — это человек иа коньках, который держнт гаителн на фнкснрованиом расстояиин перед собой н при этом вращается вокруг вертнкальиой осн. Еще однн подобный прнмер — система Земля — Луна:

центр Земли смещен относительио цeнтра масс снстемы на расстоянне около 4500 км, а прямая лииия, соедиияющая Луну с Землей, вращается с лунным сидерическим периодом вокруг цeнтра масс снстемы.

Чтобы получнть рекуррентиые соотиошеиия для коэффициеитов в разложеиях (17.60а) — (17.60в) при $\nu > 0$, иеобходимо представить коэффнциеиты, входящие в диффереициальиые уравнеиия (17.44) — (17.46), в внде рядов по степеням r. Коиечно, зиачеиия этих коэффнциентов зависят от свойств невозмущенной моделн. Считая модель сферически симметричной, можно записать, что вблизи $r = 0$

$$A/r = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{2\nu} r^{2\nu}, \tag{17.63а}$$

$$Ag/r^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{2\nu} r^{2\nu}, \tag{17.63б}$$

$$\rho/(\Gamma_1 P) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu} r^{2\nu}, \tag{17.63в}$$

$$\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{2\nu} r^{2\nu}, \tag{17.63г}$$

$$\rho g/(r\Gamma_1 P) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_{2\nu} r^{2\nu}, \tag{17.63д}$$

где коэффнциеиты разложеиий предполагаются известнымн нз свойств невозмущенной моделн. Подставляя этн разложеиия и разложеиия (17.60а) — (17.60в) в уравиеиия (17.44) — (17.46), получаем в случае $l \neq 0$ следующие уравнеиия:

$$r^{l-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} [(l+\nu)(Y_\nu + \Psi_\nu) - \sigma^2 U_\nu] r^\nu =$$

$$= r^{l+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (B_{2\mu} U_\nu - A_{2\mu} Y_\nu) r^{2\mu+\nu}, \tag{17.64}$$

$$r^{l} \sum_{\nu=0}^{\infty} [(l+1+\nu) U_\nu - l(l+1)(Y_\nu + \Psi_\nu)/\sigma^2] r^\nu =$$

$$= r^{l+2} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (E_{2\mu} U_\nu - C_{2\mu} Y_\nu) r^{2\mu+\nu}, \tag{17.65}$$

$$r^{l-2} \sum_{\nu=0}^{\infty} [\nu(2l+1+\nu)] \Psi_\nu r^\nu =$$

$$= -4\pi G r^l \sum_{\mu,\nu,\xi=0}^{\infty} [D_{2\mu}(A_{2\nu} U_\xi - C_{2\nu} Y_\xi)] r^{2\mu+2\nu+\xi}. \tag{17.66}$$

Разложення в левой части иачннаются с членов, порядок которых на две единицы меиьше, чем порядок соответствующих членов в правой частн. Поэтому в левой части коэффнциенты прн r^ν для $\nu = 0$ н $\nu = 1$ должны обращаться в нуль. Приравнивание иулю коэффициента с $\nu = 0$ в формуле (17.64) приводит к соотиошению (17.61). Это же соотношенне получается из уравнеиия (17.65), а коэффнциент прн r^0 в уравненнн (17.66) просто равеи 0. Приравииванне нулю коэффициентов в (17.64) — (17.66) с $\nu = 1$ дает $U_1 = 0$, $Y_1 = 0$ и $\Psi_1 = 0$, что является следствнем предположения о сфернческой симметрнн иевозмущеииой модели. Это предположенне определило также внд разложеиий (17.63а) — (17.63д), прниятых для параметров иевозмущенной модели.

Приравиивание иулю коэффицнеитов при следующих степеиях r в (17.64) — (17.66) дает, иакоиец, первые рекуррентиые соотиошення:

$$(l + 2)(Y_2 + \Psi_2) - \sigma^2 U_2 = B_0 U_0 - A_0 Y_0, \tag{17.67а}$$

$$(l + 3)U_2 - l(l + 1)(Y_2 + \Psi_2)/\sigma^2 = E_0 U_0 - C_0 Y_0, \tag{17.67б}$$

$$(2l + 3)\Psi_2 = -2\pi G D_0 (A_0 U_0 - C_0 Y_0). \tag{17.67в}$$

Из этих уравнений для заданных l и σ^2 можно выразить зиачения U_2, Y_2, и Ψ_2, иапример, через U_0 и Y_0 [см. уравиеиня (17.56) — (17.58)] н через иесколько первых членов в разложеииях (17.63), характеризующих иевозмущениую модель. Аналогичиая процедура для следующих степеней r дает $U_3 = 0$, $Y_3 = 0$ н $\Psi_3 = 0$; н вообще все коэффициеиты U_ν, Y_ν и Ψ_ν прн иечетных ν оказываются равиымн иулю. Продолжая подобиые действня, мы приходим к выводу, что можио вычнслить столько коэффициеитов в разложеннях (17.60а) — (17.60в), сколько необходимо. В результате получаются степенные ряды с известнымн коэффнциентами, представляющие для заданных l и σ^2 решение уравиеиий (17.44) — (17.46) вблизи цеитра звезды.

17.6б. ПОВЕРХНОСТЬ ЗВЕЗДЫ

На поверхности сферической звезды имеем $r = R$, где R — равиовесиый радиус звезды (иногда его помечают индексом 0), который здесь предполагается постояниым. Как уже отмечалось выше (см. гл. 15 и начало иастоящей главы), предположение об отсутствии давления иа поверхностн, $P = 0$, обычио является вполне удовлетворительиым и используется почтн во всех случаях. Это предположение требует, чтобы лагранжева вариация давлення также обращалась в иуль иа поверхности:

$$\delta P = 0. \tag{17.68}$$

Поскольку вектор ∇P_0 в сферической звезде имеет лншь раднальную составляющую dP_0/dr, которая иа поверхности обращается в нуль, еслн плотиость там равиа нулю, тогда и эйлерова вариация давления иа поверхностн $P' = 0$. Более общие граничные условия иа поверхностн рассматриваются в гл. 3 кннги Уиио н др. [593].

Граничное условие на поверхиости (17.68) ииогда записывают в более развериутом вндe. Для существоваиия регуляриых решений (а лншь онн обычно

интересны с физической точки зрения) необходимо, чтобы $\delta P/P$ всюду, в том числе и на поверхности звезды оставалось конечным, если давление $P_0 = 0$ на поверхности невозмущенной модели (точнее, обычно предполагают, что на поверхности невозмущенной модели становится малым или обращается в нуль отношение P/ρ). В полной аналогии со случаем чисто радиальных колебаний, рассмотренных в гл. 8, значение $\delta P/P$ на поверхности, согласующееся с граничным условием (17.68), можно и в случае нерадиальных колебаний определить на основе линеаризованного уравнения импульса. Как и в случае чисто радиальных колебаний, это значение можно найти двумя способами, что подчеркивал Дзембовский [187]:

а. Можно рассмотреть адиабатические нерадиальные колебания изотермической атмосферы (как в разд. 8.4). Тогда $\delta P/P$ определится из условия, что при $r \to \infty$ акустическая энергия на единицу объема остается конечной. (Это условие иногда называют условием отражения, см., например, [19].)

б. Можно использовать само линеаризованное уравнение импульса и из него непосредственно получить значение $\delta P/P$ на поверхности до некоторой степени подобно тому, как было сделано в разд. 8.3 для случая чисто радиальных колебаний.

Результаты подхода (б) применимы и к неадиабатическим колебаниям (гл. 18), а потому являются более общими, чем в подходе (а). Кроме того, метод (б) намного проще для вычислений. Метод (а) был использован в работах [19, 271] (см. также [269]) для нахождения граничного условия отражения. Здесь же мы представим результаты использования метода (б).

По-видимому, лучше всего начать с линеаризованного уравнения импульса в форме (5.32), причем силу на единицу массы возьмем равной $\mathbf{f} = -\nabla\psi$, где ψ — гравитационный потенциал. Рассмотрим только случай, когда в невозмущенном состоянии звезда является статической и сферически симметричной. Поэтому можно заменить d/dt на $\partial/\partial t$; будем предполагать также, что все вариации пропорциональны $\exp[i\sigma t]$. Тогда после некоторых преобразований линеаризованное уравнение импульса можно разрешить относительно $\nabla(\delta P/P)$, если использовать уравнение неразрывности в форме (17.22) и (17.27) и уравнение импульса для невозмущенной модели $(\nabla P)/\rho = \mathbf{g}$. Правую часть полученного выражения можно представить как произведение $(1/\lambda_P)$ на величину, содержащую, в частности, $\delta P/P$, где $\lambda_P = P/(\rho g)$ — высота однородной атмосферы , а g — локальное ускорение силы тяжести [см. (17.11)]. [Полученное выражение аналогично (8.10).] Поскольку вблизи поверхности $|\nabla(\delta P)/P|$ должно оставаться конечным, а λ_P мало или равно нулю, то и величина, на которую умножается $(1/\lambda_P)$, также должна быть малой или равной нулю. Приравнивая радиальный компонент этой величины нулю и разрешая относительно $\delta P/P$, получим

$$\delta P/P = -(\sigma^2 r^3/Gm + 4 - 4\pi\rho r^3/m)\delta r/r + \\ + [l(l+1)/\sigma^2 r^2](P'/\rho + \psi') + g^{-1}\partial\psi'/\partial r, \quad (17.69)$$

что выполняется по крайней мере с точностью до множителя $[1 + O(\lambda_P/R)]$ для всей правой части, где функция $O(\lambda_P/R)$ может представлять собой ряд

по степеням (λ_p/R), главный член которого порядка λ_p/R. [Уравнение (17.69) аналогично уравнению (8.11).] Значение $\delta P/P$ на поверхности получают при подстановке в правую часть поверхностных значений соответствующих величин. В частности, значение $\partial\psi'/\partial r$ на поверхности можно исключить из (17.69) с помощью граничного условия (17.71).

Уравнение, получающееся после исключения $\partial\psi'/\partial r$, представляет определенный интерес, и оно было проанализировано в [59]. Предполагая, что на поверхности $\delta P = 0$, мы после некоторых преобразований находим

$$\delta P/P = [l(l+1)Gm/\sigma^2 r^3 - \sigma^2 r^3/Gm - 4]\delta r/r +$$
$$+ [l(l+1)Gm/\sigma^2 r^3 - l - 1]\psi'/gr. \quad (17.69')$$

В приближении Каулинга (разд. 17.9) остается только член с $\delta r/r$.

Для чисто радиальных колебаний $l = 0$, и легко показать, что

$$\partial\psi'/\partial r = -4\pi G\rho\delta r. \quad (17.70)$$

Следовательно, в этом случае уравнение (17.69) точно сводится к уравнению (8.11).

Уравнения (17.68) или (17.69), или (17.69') дают одно граничное условие на поверхности (в радиальном случае только это условие и требуется, см. гл. 8). Второе граничное условие на поверхности связано с возмущением ψ' гравитационного потенциала. В [345, §75] показано, что это граничное условие имеет вид

$$\partial\psi'/\partial r + \psi'(l+1)/R = -4\pi G\rho\delta r. \quad (17.71)$$

Уравнения (17.68) или (17.69) или (17.69') и (17.71) — это те два граничных условия, которые должны выполняться на поверхности сферически симметричной конфигурации в случае малых адиабатических нерадиальных колебаний при отсутствии давления на поверхности. Физически второе условие выражает требование, чтобы как эйлерова вариация гравитационного потенциала, так и ускорение силы тяжести были непрерывными при пересечении поверхности звезды, деформированной возмущениями. Выполнение этих условий при заданных l и σ^2 позволяет найти два параметра, которые остались неопределенными в центральных граничных условиях, рассмотренных в п. 17.6а.

Два граничных условия для центра звезды состоят в том, что какие-либо две из зависимых переменных должны оставаться конечными в центре. Таким образом, условия в центре и на поверхности вместе образуют четыре граничных условия, которые должны выполняться для рассматриваемых колебаний. Однако, поскольку наша система дифференциальных уравнений имеет четвертый порядок и является однородной, одна из четырех постоянных интегрирования должна оставаться произвольной вследствие произвольной нормировки. А тогда все четыре граничных условия могут выполняться только при определенных значениях σ^2. Таким образом, мы опять имеем задачу о собственных значениях, и собственным значением является σ^2. Однако, за исключением некоторых предельных случаев (разд. 17.9), уравнения ради-

альных колебаний не образуют системы Штурма — Лиувилля, и поэтому, как правило, не существует простого и однозначного метода упорядочения собственных значений.

Наконец, интересно рассмотреть значение $\delta t/\delta r$ на поверхности звезды, где δt и δr — соответственно тангенциальная и радиальная составляющие лагранжева смещения $\delta \mathbf{r}$ элемента массы. Легко показать, что

$$(\delta t/\delta r)_{r=R} = \Omega^{-2}[1 + \psi'/(P'/\rho)]_{r=R}, \tag{17.72}$$

Ω^2 — безразмерная угловая частота, определенная в гл. 8.

Поскольку $|\psi'/(P'/\rho)|$ порядка единицы (кроме того, величиной ψ' часто вообще пренебрегают, см. разд. 17.9), $(\delta t/\delta r)_{r=R} \propto \Omega^{-2}$.

17.7. Однородная сжимаемая модель

Однородная сжимаемая модель (во всех точках которой плотность одинакова), разумеется, очень далека от действительности. Тем не менее она представляет интерес, поскольку для этой модели дифференциальные уравнения малых адиабатических нерадиальных колебаний можно свести к системе второго порядка по пространственным координатам. А решение дифференциальных уравнений сравнительно низкого порядка можно найти в виде довольно простых степенных рядов. Отметим, что для однородной модели не выполняется предположение $\rho = 0$ на поверхности, сделанное в гл. 15. Однако остальные предположения по-прежнему остаются в силе.

Первым рассмотрел эту модель Пекерис [432], и хорошее краткое изложение его работы можно найти в [345, §76]. Пекерис взял линеаризованные уравнения неразрывности, импульса и уравнение Пуассона для сферически симметричной модели общего вида, находящейся в гидростатическом равновесии, и объединил их с линеаризованным уравнением энергии для адиабатических колебаний. В результате получилась система из двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно δr и $\alpha \equiv \nabla \cdot \delta \mathbf{r} (= -\delta\rho/\rho)$ (разд. 17.1). В случае однородной модели эти два уравнения не связаны друг с другом и одно из них становится дифференциальным уравнением второго порядка, зависящим только от α. Пекерис представил его общее решение в виде степенного ряда. Требование, чтобы этот ряд удовлетворял граничным условиям, приводит к довольно простым аналитическим формулам для собственных частот колебаний. Эти формулы дают предварительное представление о так называемых p- и g-модах нерадиальных колебаний, которые будут рассматриваться ниже в данном и последующих разделах книги.

Для однородной модели при $r \leqslant R$, где R — равновесный радиус звезды, имеем

$$\rho(r) = \text{const} \equiv \rho_0, \tag{17.73}$$

$$P(r) = \tfrac{2}{3}\pi G\rho_0^2 R^2(1 - r^2/R^2), \tag{17.74}$$

$$A = -(\Gamma_1 P)^{-1} dP/dr \; (\geqslant 0). \tag{17.75}$$

Упомянутое выше дифференциальное уравнение второго порядка относительно α при $\Gamma_1 = \text{const}$ можно записать в виде [345, eq.(76.6)]

$$(R^2 - r^2)\partial^2\alpha/\partial r^2 + \partial\alpha/\partial r[(2R^2 - 6r^2)]/r +$$
$$+ \alpha[2\Omega^2/\Gamma_1 + 8/\Gamma_1 - 6 - 2l(l + 1)/\Gamma_1\Omega^2 - l(l + 1)(R^2 - r^2)/r^2] = 0.$$

Представление решения этого уравнения в виде степенного ряда показывает, что вблизи центра $\alpha \propto r^l$. Собственные частоты модели определяются тогда из условия, что степенной ряд должен быть некоторым конечным полиномом (Пекерис [432] показал, что при $r = R$ бесконечный степенной ряд расходится). Это условие имеет вид

$$\Omega^2 - l(l + 1)/\Omega^2 = - 4 + \Gamma_1[n(2l+2n+5)+2l +3] \equiv 2D_n \quad (n=0,1,2,...), \tag{17.76}$$

где для краткости правая часть записана как $2D_n$. Здесь Ω — безразмерная собственная частота, введенная в гл. 8. При $l = 0$ уравнение (17.76), как и следовало ожидать, дает собственные частоты радиальных пульсаций (гл. 8).

Уравнение (17.76) является квадратичным относительно Ω^2, и его решения

$$\Omega^2_{l,n} = D_n \pm [D^2_n + l(l + 1)]^{1/2}. \tag{17.77}$$

Отметим, что при заданных l и n один из двух корней всегда отрицательный, это соответствует динамической неустойчивости. Как мы увидим ниже (разд. 17.12), такое поведение связано с тем, что вся однородная модель конвективно неустойчива ($A > 0$).

Рассмотрим теперь колебания при больших n для фиксированного l. Тогда при $n \gg 1$ две совокупности корней уравнения (17.77) таковы:

$$\Omega^2_{l,n} \approx 2\Gamma_1 n^2 + l(l + 1)/2\Gamma_1 n^2 \text{ (}p\text{-моды)}, \tag{17.78а}$$

$$\Omega^2_{l,n} \approx - l(l + 1)/2\Gamma_1 n^2 \text{ (}g\text{-моды)}. \tag{17.78б}$$

Таким образом, для заданного l существуют два спектра, один из которых соответствует динамически устойчивым модам и характеризуется тем, что при $n \to \infty$ собственные значения Ω^2 стремятся к бесконечности; другой спектр соответствует динамически неустойчивым модам и характеризуется тем, что при $n \to \infty$ собственные значения стремятся к нулю. Первую совокупность собственных значений и собственных функций называют p-модами, вторую — g-модами. (Ниже мы увидим, что g-моды не всегда являются динамически неустойчивыми.)

Эта терминология, введенная Каулингом [109], основана на следующих фактах, не все из которых имеют отношение к рассматриваемой однородной сжимаемой модели (см. ниже). p-моды являются преимущественно радиальными и характеризуются относительно большими эйлеровыми вариациями давления и плотности; их иногда называют акустическими модами. g-моды преимущественно трансверсальные и характеризуются относительно малыми эйлеровыми вариациями давления и плотности; их иногда называют гравитационными модами. Хилл [268] сравнивает эти моды с качающимся на воде поплавком. То, что для g-мод движения являются преимущественно трансверсальными, легко увидеть, например, из уравнения (17.14), где пренебрега-

ется велнчннамн P' н ψ'. Согласно этому уравненню, ускоренне элемента массы пропорционально составляющей δr вектора $\delta\mathbf{r}$, направленной вдоль вектора ускорення силы тяжестн $\mathbf{g}$, которое для сферической звезды в гндростатическом равновесии в свою очередь направлено радиально. Малая велнчнна ускорення элемента массы (оно пропорцнонально $|\sigma^2|$ для g-мод высокого порядка) требует, чтобы двнженне характерньзовалось малымн радиальными, а значнт, в основном трансверсальными смещениями. По словам Каулннга [109], «...двнженне (соответствующее g-модам) является главным образом горнзонтальным н обусловлено стремлением снлы тяжестн сгладнть разлнчня плотностей на любой сфере, концентрнчной со звездой». Отметнм, что для g-мод с очень большнмн пернодамн аднабатнческое прнблнженне может оказаться не очень хорошнм. Другне доводы в пользу того, что p-моды преимущественно радиальные, а g-моды — трансверсальные, будут представлены в разд. 17.12.

С другой стороны, прн $l = n$ н $n \gg 1$ нмеем для g-мод выражение

$$\Omega^2_{n,n} \approx -1/(4\Gamma_1), \tag{17.79}$$

которое от n не завнснт. Фнзнческн этот случай соответствует двнженню элементов вещества, размер которых во всех направленнях прнблнзнтельно однаков н намного меньше звездного раднуса. Как мы увидим, можно считать, что g-моды с большнмн l н n опнсывают, по крайней мере в некотором смысле, конвекцию. Независимость $\Omega^2_{n,n}$ от n в этом пределе соответствует тому обстоятельству, что частота Брунта — Вяйсяля (разд. 17.2) не завнснт от размеров элемента жндкостн.

Как следует нз уравнений, представленных в [345, §76], для однородной моделн каждая пара p- н g-мод с заданнымн l н n нмеет одну н ту же собственную функцию $\alpha_{l,n}$ ($= -\delta\rho/\rho_0 = -\rho'/\rho_0$ для однородной моделн). То же справедлнво н для $\psi'_{l,n}$ н $\delta P_{l,n}$, но не для $\delta r_{l,n}$.

Рассмотрение этого случая в [488] (краткое нзложенне см. в [345, §76]) показало следующее.

Для p-мод δr имеет на однн узел больше, чем α, а для g-мод обе этн величины нмеют одинаковое число узлов. Для самых ннзших ($n = 0$) p- н g-мод с $l > 0$ результаты таковы (узлы в центре звезды не счнтаются): для p-моды α, ψ', δP н $\delta\rho$ не нмеют узлов, а δr нмеет однн узел; для g-мод нн одна нз этнх велнчнн не нмеет узлов (т.е. прн любом r в днапазоне $0 \leqslant r \leqslant R$ все велнчнны сохраняют знак). Можно отметнть, что p-мода с $n = 0$ обычно считается блнжайшнм нерадиальным аналогом основной моды чисто радиальных колебаний произвольной моделн звезды.

Для однородной сжимаемой моделн, как впервые указал Чандрасекар [77], существует еще одна мода колебаний, частный случай нз класса кельвиновских мод. Эта мода характерньзуется для данной моделн чисто соленоидальными смещениями, прн которых $\nabla \cdot \delta\mathbf{r} = 0$. Отсюда следует, что $\delta P = 0$ н $\delta\rho = 0$, как н для несжимаемой жндкостн, прнчем первое соотношенне справедлнво для аднабатнческнх колебаний. Собственные значення для этой моды равны [77, 523]

$$\Omega^2_f = 2l(l-1)/(2l+1). \tag{17.80}$$

Это выражение справедливо и для однородной несжимаемой сферы, впервые изученной Кельвином [572]. Фактически, указанная мода является единственной возможной модой колебаний такой модели, что и привело к появлению термина «кельвиновская мода». Она соответствует f-моде Каулинга [109] и для моделей общего вида не является соленоидальной, как показано в [453]. По этой причине f-моду для моделей общего вида иногда называют псевдокельвиновской модой.

Можно отметить три обстоятельства: 1) $\Omega_f^2 = 0$ при $l = 0$ или $l = 1$; 2) Ω_f^2 не зависит от Γ_1 (что вытекает из соотношений $\delta P = 0$ и $\delta\rho = 0$); 3) Ω_f^2 не зависит от n, т.е. существует только наинизшая мода, $n = 0$.

Применяя к однородной модели полную систему уравнений четвертого порядка (не преобразуя эти уравнения в систему второго порядка), Смейерс [523] показал, что f-мода является естественным следствием его результатов (см. также [173, 279]). Смейерс показал также, что для соленоидальных кельвиновских мод однородной сжимаемой модели радиальная составляющая δr векторного смещения $\delta\mathbf{r}$ элемента массы равна $\delta r = \text{const} \cdot r^{l-1}$, а тангенциальная составляющая равна $\delta t = \delta r/l$.

В табл. 17.1 приведены некоторые результаты для малых адиабатических колебаний однородной сжимаемой модели с $\Gamma_1 = 5/3$. Они основаны отчасти на данных табл. 15 в [345].

ТАБЛИЦА 17.1

Безразмерные собственные значения Ω^2 для малых адиабатических колебаний однородной сжимаемой модели ($\Gamma_1 = 5/3, \Omega^2 = 3/4\sigma^2/\pi G\rho_0 = \sigma^2 R^3/GM$)

l	n = 0		1		2	
0 (радиальные)	1,000		12,677		31,000	
1	4,754	(p)	19,44	(p)	41,05	(p)
	—	(f)	—		—	
	−0,4207	(g)	−0,1029	(g)	−0,04872	(g)
2	8,382	(p)	26,23	(p)	51,12	(p)
	0,8000	(f)	—		—	
	−0,7158	(g)	−0,2288	(g)	−0,1174	(g)
3	12,00	(p)	33,03	(p)	61,20	(p)
	1,714	(f)	—		—	
	−1,000	(g)	−0,3633	(g)	−0,1961	(g)
4	15,61	(p)	39,84	(p)	71,28	(p)
	2,667	(f)	—		—	
	−1,281	(g)	−0,5021	(g)	−0,2806	(g)

17.8. Общее описание мод p, g и f

В этом разделе мы дадим общее описание некоторых свойств нерадиальных колебаний звезд; класс крутильных мод (разд. 17.3) мы здесь рассматривать не будем. Наше описание основывается на линейной адиабатической теории, однако обычно предполагают, что такие эффекты, как нелинейность или иеадиабатичность (особенно, если они малы), существенно не изменят описываемых здесь качествеииых характеристик. Некоторые иеадиабатические эффекты кратко рассматриваются в гл. 18. Большинство выводов данного раздела относится лишь к достаточно простым звездиым моделям. Имеются в виду модели, которые являются химически однородиыми, ие обладают несколькими лучистыми и конвективиыми зонами, чередующимися в пространстве, и не имеют слишком высокой концентрации вещества к центру. Более сложные модели показывают качественно иные особенности колебаний и будут рассмотрены в разд. 17.10. Классификация нерадиальиых колебаиий на моды p, g и f для однородиой сжимаемой модели была введеиа в разд. 17.7 в соответствии с традиционной схемой Каулинга [109]. Наши обозначения p, g и f в настоящем разделе и в остальиой части книги будут также соответствовать этой схеме.

На рис. 17.2 показан общий вид спектров линейных адиабатических нерадиальных колебаний обычных звезд. Этот рисуиок подобен рисуикам, использованным в [524] и других работах. Вдоль горизонтальной оси отложеи

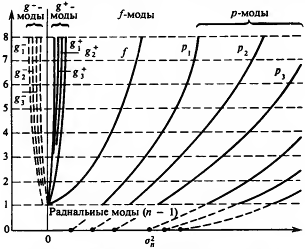


Рис. 17.2. Собственные значения $\sigma_n^2 = (2\pi/\text{период})^2$ линейиых адиабатических нерадиальиых колебаний для различиых мод (n) в зависимости от степени l сферических гармоиик (схематичио). Показаны четыре типа сфероидальиых мод нерадиальиых колебаний (p, f, g^+, g^-) по классификации Каулинга [109]. Продолжение p-мод к горизонтальной оси (штриховые линии) указывает соответствующие собствеиные значения радиальных мод ($l = 0$) порядка $n - 1$.

квадрат угловой частоты колебаний σ_n^2, где n — порядок моды ($n = 1, 2, \ldots$)*, а вдоль вертикальной оси отложена степень l сферической гармоники. Собственные частоты радиальных колебаний (соответствующие $l = 0$) изображены точками на горизонтальной оси.

Как показано на рис. 17.2, нерадиальные собственные частоты обычно четко разделяются на четыре различных класса: p-моды, обособленная мода f (для $l \geqslant 2$), моды g^+ и g^-. Моды p обычно характеризуются относительно большими эйлеровыми вариациями давления. Эти вариации в основном и ответственны за возвращающие силы, действующие при колебаниях. Отметим, что σ_n^2 увеличивается с ростом как n, так и l.

Моды g характеризуются относительно малыми эйлеровыми вариациями давления для заданного векторного смещения элемента массы (см. ниже разд. 17.12). Большая часть возвращающей силы обусловлена здесь силой тяжести (относительно малой) (разд. 17.12). Для таких мод при заданном l и при $n \to \infty$ $|\sigma_n^2| \to 0$. С другой стороны, часто оказывается, что $|\sigma_n^2|$ для заданного n при достаточно больших l перестает зависеть от l (разд. 17.12); в случае однородной модели это не выполняется (разд. 17.12). Наконец, если $l \approx n$ при $n \to \infty$, то $|\sigma_n^2|$ перестает зависеть от n (разд. 17.10). Моды g^+ динамически устойчивы ($\sigma_n^2 > 0$), а моды g^- динамически неустойчивы ($\sigma_n^2 < 0$). (Различие знаков у σ_n^2 является единственным различием в определении мод g^+ и g^-.) Критерием того, какой из двух этих классов преобладает, служит величина A, рассмотренная в разд. 17.2. Дальнейшее обсуждение соотношения между модами g^+ и g^- и знаком A будет проведено ниже.

Единственная в своем роде мода f, или кельвиновская мода, существует в звездах только как самая низшая мода ($n = 0$ в однородной модели, $n = 1$ в моделях общего вида) и только при $l \geqslant 2$. Для достаточно простых моделей и при всех $l \geqslant 2$ ее собственное значение σ^2 является промежуточным между собственными значениями мод p_1 и g_1 (здесь мы приняли для наинизшей моды $n = 1$).

Отметим (рис. 17.2), что для $l = 0$ моды f и g отсутствуют. Кроме того, если кривые для мод p_n с $l > 0$ продолжить вниз до $l = 0$, то точки пересечения с горизонтальной прямой $l = 0$ дают собственные значения σ^2 для соответствующих радиальных мод (см. подробнее [13]). По этой причине мода p_n обычно рассматривается как нерадиальный аналог радиальной моды порядка $n - 1$. Моды f и g не имеют радиальных аналогов. Из рассмотрения рис. 17.2 может показаться, что моды g^+ имеют $\sigma^2 = 0$ при $l = 1$, однако на самом деле $\sigma^2 > 0$ для этого значения l. Поэтому кривая для моды f (для которой $\sigma^2 = 0$ при $l = 1$), казалось бы, должна пересечь все кривые для мод g^+ при подходе к значению $\sigma^2 = 0$. В действительности же имеет место так называемое «подскакивание» или «непересекаемость» частот [13].

После работы Пекериса [432] считалось, что дипольная мода $l = 1$ не имеет особого физического смысла, поскольку она может соответствовать сме-

---

*Заметим, что для моделей общего вида наинизшую моду нерадиальных колебаний принято обозначать как моду с $n = 1$, тогда как низшая мода однородной сжимаемой модели обозначалась как мода с $n = 0$, см. разд. 17.7.

щению центра масс системы, что действительно должно иметь место для несжимаемого шара. Однако Смейерс [523] показал, что для сжимаемого шара мода с $l = 1$ имеет более глубокий физический смысл, по крайней мере в случае адиабатических колебаний. При этом центр масс системы остается на месте, а происходит смещение геометрического центра объекта (разд. 17.6а). Для всех других значений l центр масс и геометрический центр совпадают и их смещение равно нулю. Доказательство того, что и в более общем случае неадиабатических колебаний центр масс при $l = 1$ не смещается, было проведено в работе [85].

Рассмотрим теперь собственные функции малых адиабатических нерадиальных колебаний, в основном следуя работе Смейерса [524]. Многие из приводимых замечаний основаны на опыте, накопленном при анализе большого объема численных результатов. Поэтому справедливость многих из этих замечаний может и не быть очевидной, если исходить только из уравнений, а их степень общности остается до некоторой степени неопределенной. Общие доказательства до сих пор отсутствуют, вероятно, они и не существуют. Почти несомненно, что приводимые замечания справедливы для простых звездных моделей, но для более сложных моделей возможны исключения (см. ниже разд. 17.10). Чтобы дать общее представление, мы собрали в табл. 17.2 некоторые данные относительно нерадиальных (а для сравнения и радиальных) адиабатических колебаний политроп с показателями $0 \leqslant \nu \leqslant 4$, основываясь на работах [279, 454, 497, 498]. Отметим, что в соответствии с (17.33) и (17.23) величина P' пропорциональна δt (тангенциальной составляющей вектора $\delta \mathbf{r}$),

ТАБЛИЦА 17.2а

Результаты для политропы с показателем $\nu = 0$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_1	8,38	4,00	1	1	1
f	0,800	12,96	0	0	0
g_1	−0,72	—	0	1	1
g_2	−0,22	—	1	2	2
g_3	−0,117	—	2	3	3
F	1	11,59	0	—	0
$1H$	12,67	3,256	1	—	1
$2H$	31,00	2,082	2	—	2

*) Для сравнения в последних трех строках приведены результаты для адиабатических радиальных колебаний ($l = 0$) по данным [279]. F, $1H$ и $2H$ соответственно основная мода, первый и второй обертоны (см. сноску в разд. 8.12в).

ТАБЛИЦА 17.2б

Результаты для политропы с показателем $\nu = 1$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для δr	Число узлов для P'	Число узлов для ρ'
p_{10}	312	0,656	10	10	10
p_9	260	0,719	9	9	9
p_8	211,6	0,7968	8	8	8
p_7	168,4	0,8931	7	7	7
p_6	129,9	1,017	6	6	6
p_5	96,15	1,182	5	5	5
p_4	67,08	1,415	4	4	4
p_3	42,83	1,771	3	3	3
p_2	23,49	2,391	2	2	2
p_1	9,308	3,799	1	1	1
f	1,498	9,470	0	0	0
g_1	−0,3029	—	0	1	1
g_2	−0,1383	—	1	2	2
g_3	−0,08025	—	2	3	3
g_4	−0,05272	—	3	4	4
g_5	−0,03742	—	4	5	5
g_6	−0,02798	—	5	6	6
g_7	−0,02174	—	6	7	7
g_8	−0,01739	—	7	8	8
g_9	−0,01424	—	8	9	9
g_{10}	−0,01187	—	9	10	10
F	1,892	8,426	0	—	—
$1H$	12,09	3,333	1	—	—
$2H$	27,08	2,227	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

если пренебречь возмущением ψ' гравитационного потенциала (приближение Каулинга; см. разд. 17.9). В табл. 17.2 приведены значения пульсационной постоянной Q [см., например, (2.4)], выраженные в сутках (что отмечено индексом d). Дополнительные численные результаты содержатся в работах

ТАБЛИЦА 17.2в

Результаты для политропы с показателем $\nu = 1,5$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_3	41,31	1,803	—	—	—
p_2	23,52	2,390	—	—	—
p_1	10,29	3,613	—	—	—
f	2,119	7,962	—	—	—
g_1	0	∞	—	—	—
g_2	0	∞	—	—	—
g_3	0	∞	—	—	—
g_4	0	∞	—	—	—
g_5	0	∞	—	—	—
g_6	0	∞	—	—	—
g_7	0	∞	—	—	—
g_8	0	∞	—	—	—
g_9	0	∞	—	—	—
g_{10}	0	∞	—	—	—
F	2,706	7,046	0	—	—
$1H$	12,54	3,273	1	—	—
$2H$	26,58	2,248	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

ТАБЛИЦА 17.2г

Результаты для политропы с показателем $\nu = 2$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	264	0,713	10	10	10
p_9	221	0,780	9	9	9
p_8	182	0,859	8	8	8
p_7	145,7	0,9602	7	7	7
p_6	113,7	1,087	6	6	6
p_5	85,50	1,253	5	5	5
p_4	61,13	1,482	4	4	4
p_3	40,63	1,818	3	3	3
p_2	24,07	2,362	2	2	2
p_1	11,56	3,409	1	1	1
f	3,113	6,569	0	0	0
g_1	0,5633	15,44	1	1	1

*) См. примечание к табл. 17.2а.

Продолжение табл. 17г

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
g_2	0,2968	21,27	2	2	2
g_3	0,1839	27,03	3	3	3
g_4	0,1254	32,73	4	4	4
g_5	0,09112	38,40	5	5	5
g_6	0,06928	44,03	6	6	6
g_7	0,05449	49,65	7	7	7
g_8	0,04401	55,25	8	8	8
g_9	0,03630	60,83	9	9	9
g_{10}	0,03046	66,41	10	10	10
F	4,001	5,794	0	—	—
$1H$	13,34	3,173	1	—	—
$2H$	26,58	2,248	2	—	—

ТАБЛИЦА 17.2д

Результаты для политропы с показателем $\nu = 3$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	234	0,758	10	10	10
p_9	196	0,828	9	9	9
p_8	163	0,908	8	8	8
p_7	132,4	1,007	7	7	7
p_6	104,8	1,132	6	6	6
p_5	80,55	1,291	5	5	5
p_4	59,42	1,504	4	4	4
p_3	41,47	1,800	3	3	3
p_2	26,72	2,242	2	2	2
p_1	15,26	2,967	1	1	1
f	8,175	4,054	0	0	0
g_1	4,915	5,228	1	1	1
g_2	2,828	6,892	2	2	2
g_3	1,822	8,586	3	3	3
g_4	1,270	10,28	4	4	4
g_5	0,9360	11,98	5	5	5
g_6	0,7188	13,67	6	6	6
g_7	0,5691	15,36	7	7	7
g_8	0,462	17,1	8	8	8
g_9	0,382	18,8	9	9	9
g_{10}	0,322	20,4	10	10	10
F	9,255	3,810	0	—	—
$1H$	16,98	2,813	1	—	—
$2H$	28,48	2,172	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

ТАБЛИЦА 17.2е

Результаты для политропы с показателем $\nu = 3{,}25$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для:		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	227	0,769	10	10	10
p_9	192	0,836	9	9	9
p_8	160	0,916	8	8	8
p_7	130	1,02	7	7	7
p_6	103,6	1,139	6	6	6
p_5	80,18	1,294	5	5	5
p_4	59,66	1,500	4	4	4
p_3	42,22	1,784	3	3	3
p_2	27,88	2,195	2	2	2
p_1	16,96	2,814	1	1	1
f	11,24	3,457	0	2	0
g_1	7,972	4,105	1	1	1
g_2	4,857	5,259	2	2	2
g_3	3,172	6,508	3	3	3
g_4	2,224	7,772	4	4	4
g_5	1,644	9,039	5	5	5
g_6	1,264	10,31	6	6	6
g_7	1,003	11,57	7	7	7
g_8	0,818	12,8	8	8	8
g_9	0,674	14,1	9	9	9
g_{10}	0,569	15,4	10	10	10
F	11,03	3,490	0	—	—
$1H$	18,89	2,667	1	—	—
$2H$	29,87	2,121	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

[136, 338]; численные результаты для звезд в верхней части главной последовательности можно найти в [9].

Для p-мод $\delta r/r$ имеет узел, который лежит ближе к центру, чем любой узел $\delta t/r$; для g-мод верно обратное. По-видимому, это свойство сохраняется даже для моделей с высокой концентрацией вещества к центру (см. разд. 17.10). Для моды f $\delta r/r$ и $\delta t/r$ не имеют узлов, если исключить политропы с большим показателем ($\geqslant 3{,}25$) или более сложные модели. Кроме того, для этой моды δr и ρ' на любом расстоянии от центра имеют одинаковый знак, по крайней мере для простых моделей. Отсюда и из соотношения (5.16) между эйлеровой и лагранжевой вариациями следует, что для моды f величина $\delta\rho$ повсюду относительно мала. В случае однородной модели (сжимаемой или несжимаемой), как мы видели, $\delta\rho \equiv 0$ для этой моды. Для любой нерадиальной моды величины $\delta r/r$ и $\delta t/r$ имеют одинаковое число узлов [524]; однако эта закономерность может не выполняться для более сложных моделей.

ТАБЛИЦА 17.2ж

Результаты для политропы с показателем $\nu = 3{,}5$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	223	0,776	10	10	10
p_9	189	0,843	9	9	9
p_8	158	0,922	8	8	8
p_7	128	1,02	7	7	7
p_6	102,9	1,142	6	6	6
p_5	80,10	1,295	5	5	5
p_4	60,29	1,493	4	4	4
p_3	43,41	1,759	3	3	3
p_2	29,76	2,124	2	2	2
p_1	20,93	2,533	1	1	1
f	16,16	2,883	2	2	2
g_1	12,10	3,332	1	3	1
g_2	8,542	3,966	2	2	2
g_3	5,741	4,837	3	3	3
g_4	4,063	5,750	4	4	4
g_5	3,017	6,673	5	5	5
g_6	2,324	7,603	6	6	6
g_7	1,848	8,526	7	7	7
g_8	1,50	9,46	8	8	8
g_9	1,24	10,4	9	9	9
g_{10}	1,05	11,3	10	10	10
F	12,64	3,260	0	—	—
$1H$	21,21	2,516	1	—	—
$2H$	32,08	2,046	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

Для заданиой p-моды (скажем, p_n) δr всегда имеет по крайней мере на один узел больше, чем для соответствующей моды ($n - 1$) чисто радиальных колебаиий. Кроме того, для p-мод амплитуда измеиеиий $\delta r/r$, как правило, мала в большей части звезды и отиосительио велика вблизи поверхности. С другой стороны, для g-мод $\delta r/r$ может оказаться отиосительио большим глубо-

ТАБЛИЦА 17.2з

Результаты для политропы с показателем $\nu = 4$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для δr	P'	ρ'
p_{10}	216	0,789	10	10	10
p_9	184	0,854	9	9	9
p_8	154	0,934	8	8	8
p_7	128	1,02	7	7	7
p_6	105,2	1,130	6	6	6
p_5	87,45	1,239	5	5	5
p_4	76,65	1,324	4	6	6
p_3	62,86	1,462	5	5	5
p_2	50,81	1,626	4	4	4
p_1	42,14	1,785	3	5	5
f	34,33	1,978	4	4	4
g_1	27,59	2,206	3	5	5
g_2	23,00	2,417	4	4	4
g_3	17,99	2,732	5	5	5
g_4	15,36	2,957	4	4	4
g_5	12,76	3,245	5	5	5
g_6	10,08	3,650	6	6	6
g_7	8,085	4,076	7	7	7
g_8	6,62	4,50	8	8	8
g_9	5,50	4,94	9	9	9
g_{10}	4,65	5,37	10	10	10
F	15,15	2,978	0	—	—
$1H$	24,94	2,321	1	—	—
$2H$	37,07	1,904	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

ко в звездных недрах (см. ниже разд. 17.13). (Однако по причинам, указанным в конце разд. 18.3, для g-мод белых карликов $\delta r/r$ в недрах относительно мало.)

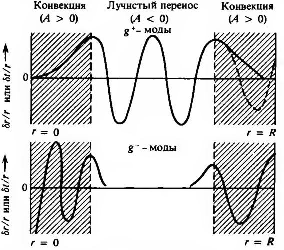
Отметнм также, что для достаточно простых звездных моделей между разлнчнымн параметрами пульсацнй существуют простые соотношення. Напрнмер, для такнх моделей число узлов (нулей) раднальной составляющей δr вектора $\delta \mathbf{r}$ равно порядку моды для мод p н g^+ (не счнтая при зтом узла в точке $r = 0$ для $l \neq 1$) н равно нулю для моды f.

Некоторые свойства собственных функцнй g-мод для масснвных звездных моделей ($\sim 30 - 200 M_{\odot}$), состоящих нз конвектнвного ядра н лучнстой оболочки, продемонстрнрованы на рнсунках в работе [524], которые мы здесь не воспронзводнм. Этн рнсункн показывают, что для мод g^+ самому внутреннему узлу $\delta\rho$ (а значит,н δP в случае аднабатнческнх колебаннй) не соответствует ннкакой узел δr. В отличне от раднальных колебаннй узел δr не обязательно подразумевает существованне по соседству узла $\delta\rho$. Это заключенне связано с тем, что в случае нераднальных колебаннй в правой частн выражения (17.27) для $\operatorname{div}\delta\mathbf{r}$ ($\propto |\delta\rho|$) присутствует дополнннтельный член: горнзонтальные смещення могут также вызывать сжатне нли расширенне вещества. Из тех же результатов следует, что для мод g^+ знаки δr н $\delta\rho$ протнвоположны, за нсключеннем, вероятно, областей вблнзи поверхности звезды. Это, вообще говоря, означает, если учесть соотношенне (5.16) между зйлеровой и лангранжевой варнацнямн, что в такой звезде для рассматрнваемых мод член ρ' оказывается меньше, чем $\delta r(d\rho/dr)$ (мы предполагаем, что $d\rho/dr < 0$), в предельном случае $\rho' = 0$. Аналогнчно, велнчнна P' для зтнх мод также должна быть относительно малой. А тогда обычным путем можно показать, что для такнх колебаннй возвращающаяся снла на еднннцу массы $| -(\nabla P')/\rho + \rho'\nabla P/\rho^2 - \nabla\psi' |$ должна быть относнтельно малой. Соответственно, и частота колебаннй может оказаться довольно малой, что действнтельно нмеет место в случае мод g^+. С фнзнческой точкн зрения, можно сказать, что каждый злемент, перемещающийся в заданное положенне, нмеет почтн такне же фнзнческне характернстнкн, как н окружающее вещество (которое по предположенню находится в гндростатнческом равновеснн), н поэтому сам зтот злемент близок к гндростатнческому равновесию. Следовательно, частоты колебаннй могут оказаться очень малыми. С другой стороны, для p-мод (нлн для обычных звуковых волн) велнчнны ρ' н P' могут быть относительно велнкн, что прнведет к большнм возвращающим силам, н поэтому частоты колебаннй могут быть очень высокнмн.

Как показано в работе [86], угловая частота σ для g-мод всегда должна быть меньше, чем самый высокий максимум частоты Брунта — Вяйсяля N.

В работах [344] и [502] нсследовано пространственное поведение динамически устойчнвых н неустойчнвых g-мод (соответственно g^+, $\sigma^2 > 0$ и g^-, $\sigma^2 < 0$) в лучнстых ($A < 0$) нлн конвектнвных ($A > 0$) областях звездных моделей. Обе работы используют приблнженне Каулннга (разд. 17.9), в котором пренебрегается возмущеннем ψ' гравнтацнонного потенцнала. В [344] рассматрнвается только аснмптотическнй предел, когда $|\sigma^2|$ мало, тогда как в [502] на значенне велнчнны $|\sigma^2|$ не накладывается ннкакнх огранnченнй. Из полученных результатов следует, что собственные функцнн мод g^- могут ос-

циллировать только в конвектнвно неустойчивых областях ($A > 0$). С другой стороны, собственные функции мод g^+ могут осциллнровать только в лучнстых областях ($A < 0$), если эти областн не расположены во внешних частях звезды. В последнем случае колебательный характер собственных функций не зависит от знака A. В тех областях, в которых собственные функцин ие осцнллируют, они обычно экспоненцнально убывают с увеличеннем расстояння от границ областн (областей), где они осциллнруют. Эта ситуация схематически представлена на рнс. 17.3 для модели звезды, состоящей нз конвективного ядра, конвектнвной оболочкн и лучистой промежуточной зоны.



РНС. 17.3. Собственные функцнн (схематнчно) мод g^+ (вверху) н g^- (вннзу) в моделн звезды, состоящей нз конвектнвного ядра ($A > 0$), конвектнвной оболочкн ($A > 0$) н лучнстой промежуточной зоны ($A < 0$). δr н δt — соответственно радиальная и трансверсальная составляющие лагранжева смещення элемента массы, а r — равновесное раднальное расстояние. Сплошная н штрнховая линнн в верхней частн рнсуика показывают два возможных поведення собственных функцнй мод g^+ во внешней конвектнвной оболочке.

Наконец, интересна связь g-мод с конвективной неустойчивостью (т.е. со знаком величнны A; см. разд. 17.2). Приводимые ниже замечания основаны на строгом рассмотреиин, проведенном Лебовицем [326 — 328] для малых адиабатических нерадиальиых колебаний сферических звезд. Рекомендуем также наглядное рассмотрение в работе [344], осиованное иа пренебрежеиии возмущениями ψ' гравитациониого потеицнала (приближеиие Каулинга, разд. 17.9). (Эти замечания неприменимы к крутильиым модам, упомянутым в разд. 17.3 и изванным в [327] тривиальными модами.) Если повсюду в звезде $A > 0$ (конвективная устойчивость), то для всех n $\sigma_n^2 > 0$. Другими словами, моды g^- в этом случае не существуют. Если на любом коиечиом участке в интервале $0 \leqslant r \leqslant R$ $A = 0$, то существуют так изываемые иейтральные

моды ($\sigma_n^2 = 0$). В частностн, еслн $A = 0$ по всей звезде, то для g-мод $\sigma_n^2 = 0$ прн любых n, т.е. такне моды отсутствуют. Как показано в [327], обращенне A в нуль в иекоторой конечной области действнтельно является необходнмым н достаточным условнем того, что для некоторых мод $\sigma_n^2 = 0$. С другой стороны, в [328] показано, что условне $A > 0$ на некотором конечном участке в ннтервале $0 \leqslant r \leqslant R$ служнт иеобходнмым н достаточным условнем существовання диамнческн неустойчнвых мод ($\sigma_n^2 < 0$). В частностн, если по всей звезде $A > 0$, то моды g^+ ие существуют. Наконец, еслн в одних частях звезды $A < 0$, а в другихA $A > 0$, то существуют как g^+-, так и g^-моды. Действительно, нз прнведенных выводов следует, что одновременное существованне мод g^+ н g^- требует, чтобы величнна A нмела однн знак в одной частн (частях) звезды, и протнвоположный — в другой частн (частях). Полезно также отметнть, что прн достаточно малом $|A|$

$$\sigma_n^2 \propto \langle -A \rangle \tag{17.81}$$

в случае g-мод, где угловые скобкн обозначают соответствующее усреднеиие по звезде (см. [345, § 79]).

Связь g-мод с коивектнвной неустойчнвостью была рассмотреиа также в работе [538].

17.9. Приближение Каулинга

В одном нз самых первых нсследованнй малых адиабатическнх нерадиальных колебанні звезд, где впервые былн введены термины «моды p, f н g», Каулнг [109] полностью пренебрег возмущеннямн ψ' гравнтацнонного потенциала. Качественным основаннем такого пренебрежения служнт то, что в каждой точке ψ' связано с эффектамн гравнтациоиного потенциала, более илн менее усредненнымн по всей звезде. Усредненне должно сглажнвать локальные флуктуацин гравнтацноиного потенциала. Интуитнвно подобное предположеине кажется вполне возможным, что н было подтверждеио в действительиостн, особеино для мод высокого порядка (большие зиачення n н/илн l) н для моделей с высокой концентрацней вещества к центру, см. [109, 308, 454, 488]. Прнближенне, в котором пренебрегается велнчиной ψ', обычно называют «прнблнжением Каулннга» н счнтают, что оно не меняет математической сущностн задачн (см., иапрнмер, [345, §79]). Это прнблнженне почтн всегда нспользуется в метеорологических, океаиографическнх и т.п. расчетах (см., напрнмер, [194, 580, 581]).

То, что для мод высокого порядка величнна $|\psi'|$ должна быть малой, следует, иапрнмер, нз уравнення Пуассона. Еслн заменнть d/dr на ik, где k — радиальное волновое чнсло (см. замечання в начале разд. 17.12), то легко получнть следующнй результат:

$$|\psi'| \propto [k^2 + l(l+1)/r^2]^{-1}. \tag{17.82}$$

Это соотношеиие показывает, что действительно $|\psi'| \to 0$ при $k \to \infty$ илн $l \to \infty$, т.е. для мод «высокого порядка».

Еслн ψ' отброснть, то очевндно, что оставшнеся уравнения образуют сн-

стему второго порядка, которая довольно подробно и в основном с математической точки зрения была проанализирована в работах [86, 338, 339, 345, 407, 502, 503, 507, 626] и других. Мы кратко изложим здесь часть полученных результатов, введя две новые переменные, которые широко использовались в упомянутых исследованиях:

$$v \equiv uP^{1/\Gamma_1} = r^2 \delta r P^{1/\Gamma_1}, \qquad (17.83а)$$

$$w \equiv y\rho P^{-1/\Gamma_1} = P'/P^{1/\Gamma_1}. \qquad (17.83б)$$

Пренебрегая величиной ψ' и принимая, кроме того, показатель адиабаты Γ_1 постоянным (это предположение будет подразумеваться и в остальной части данного раздела, если не оговорено специально), можно привести основные уравнения к виду

$$dv/dr = [l(l+1)/\sigma^2 - r^2\rho/\Gamma_1 P]\, P^{2/\Gamma_1} w/\rho, \qquad (17.84а)$$

$$dw/dr = (\sigma^2 + Ag)\rho v/r^2 P^{2/\Gamma_1}. \qquad (17.84б)$$

(Обобщение на случай $\Gamma_1 \neq$ const см. в [407].)

В приближении Каулинга переменная y пропорциональна трансверсальной, или тангенциальной («горизонтальной»), составляющей δt лагранжева смещения элемента массы. Поэтому $w \propto \delta t$, тогда как $v \propto \delta r$.

Исключая из системы (17.84) v или w, можно получить эквивалентные друг другу уравнения второго порядка относительно каждой из этих переменных:

$$d\{(\rho/P^{2/\Gamma_1})[l(l+1)/\sigma^2 - r^2\rho/\Gamma_1 P]^{-1} dv/dr\}/dr - (\sigma^2 + Ag)\rho v/r^2 P^{2/\Gamma_1} = 0, \qquad (17.85а)$$

$$d\{(P^{2/\Gamma_1}/\rho)[r^2/(\sigma^2 + Ag)]dw/dr\}/dr - [l(l+1)/\sigma^2 - r^2\rho/\Gamma_1 P]w = 0. \qquad (17.85б)$$

Эти уравнения можно дополнить следующими граничными условиями:

$$v(0) = 0, \qquad v(R) = 0,$$

$$w(0) = 0, \qquad w(R) = 0. \qquad (17.86)$$

Можно показать, что граничное условие для $w(R)$ справедливо только в том случае, когда эффективный показатель политропы $\nu_e > 1/(\Gamma_1 - 1)$; при этом предполагается, что величина P на поверхности становится очень малой или обращается в нуль. В противном случае, величина $w(R)$ может отличаться от нуля или быть бесконечно большой. Поскольку приведенное условие для показателя политропы одновременно является условием конвективной устойчивости (см. [146, Ch.13]), последнее граничное условие в (17.86) справедливо, только если вещество вблизи самой поверхности звезды находится в лучистом равновесии (что почти всегда имеет место в реальных звездных моделях; см., например, [146, Ch. 20].

Из уравнений (17.85) становится понятным, как впервые отметил Каулинг [109] (см. также [345, §79]), что,когда величина $|\sigma^2|$ либо очень велика, либо очень мала, эти уравнения принимают форму уравнений Штурма — Лиувилля и к ним полностью применима соответствующая теория (см., например, [282, Ch. 9 — 11]). Например, при очень больших σ^2 уравнение (17.85а) стано-

вится уравиением Штурма — Лиувилля с собствеииым значеиием σ^2. В таком случае должио существовать бескоиечиое дискретиое миожество собствеииых значеиий, стремящихся к бескоиечиости для мод очеиь высокого порядка; Каулииг [109] иазвал эти моды p-модами. Кроме того, эта асимптотическая форма уравиеиия (17.85а) показывает, что всегда $\sigma^2 > 0$ (см. также ииже). Для очеиь малых σ^2 уравиеиие (17.85б) стаиовится уравиеиием Штурма — Лиувилля с собствеииым значеиием $1/\sigma^2$. Тогда должеи существовать бескоиечный дискретный спектр собствеииых значеиий, причем для мод высокого порядка σ^2 стремится к иулю; Каулииг иазвал эти моды g-модами. Кроме того, как впервые отметили Леду и Смейерс [344], из асимптотического вида уравиеиия (17.85б) при малых σ^2 вытекает следующее. Если по всей звезде $A < 0$ (лучистый переиос), то $\sigma^2 > 0$; если же повсюду $A > 0$ (коивекция), то $\sigma^2 < 0$; накоиец, если в одиих частях звезды $A < 0$, а в других $A > 0$, то должиы существовать значения σ^2 обоих зиаков, т.е. должиы существовать как g^+-, так и g^--моды.

Интегральные выражеиия для σ^2 в обоих упомяиутых пределах были получеиы Леду и Вальравеиом [345, §79] иа осиове уравиеиий, аналогичиых уравиеииям (17.85). Мы отсылаем заинтересоваииого читателя к этой работе.

Некоторые расчеты, представлениые в [345, §79] (см. также [454]), указывают на то, что приближеиие Каулинга почти всегда дает σ^2 с ошибкой, ие превышающей 20 %, а зачастую оказывается намиого более точным.

17.10. Нерадиальные моды для сложных звездных моделей

Под «сложиыми» звездиыми моделями мы поиимаем в довольио широком смысле модели с высокой коицеитрацией вещества к цеитру, с чередующимися лучистыми и коивективиыми областями, а также химически иеодиородные модели, такие, как модели проэволюционировавших звезд. Классическими примерами подобиых моделей служат политропы с отиосительио высокой коицеитрацией массы к цеитру, т.е. с эффективиым показателем политропы $\nu_e \gtrsim 3{,}25$ (см., например, [146, Ch. 12]). Свойства нерадиальиых колебаиий таких моделей были впервые рассмотреиы в [454] и приведеиы нами в табл. 17.2а — 17.2з. Например, в случае политроп с $\nu_e \lesssim 3{,}25$ δr для моды f при $l = 2$ ие имеет ии одиого узла. Одиако если ν_e стаиовится больше указаиного значеиия, то в этой моде появляются два дополиительиых узла, при дальнейшем увеличеиии ν_e — еще два узла, и т.д. (согласио [503], для $l = 2$ первое добавление узлов происходит при $\nu_e = 3{,}42$, что соответствует отиошеиию цеитральиой и средией плотиостей $\rho_c/\bar{\rho} = 127{,}5$). Близкие моды ведут себя качествеиио одинаково: когда коицеитрация массы к цеитру увеличивается, появляются дополиительиые узлы в δr, по два новых узла одиовремеиио. В то же самое время моды промежуточиой частоты приобретают свойства гравитациоиных мод в цеитральиых областях звезды и акустических мод в ее виешиих слоях. Причииы этих особеииостей будут рассмотрены ниже в даииом разделе и в разд. 17.11. Другие примеры сложиых моделей представлены в работах [407, 408] (звезды в стадии эволюции сразу после ухода с главиой

последовательности), [8] (несколько более проэволюционировавшие звезды), [242] (составные политропы), [187, 188, 190, 409] (сильно проэволюционировавшие звезды с высокой концентрацией вещества к центру, находящиеся в стадии горения гелия в ядре), [395] (маломассивные звезды, ушедшие с главной последовательности и имеющие внешнюю конвективную зону). Как хорошо известно, для этих более сложных моделей перестают выполняться простые соотношения, отмеченные выше и в разд. 17.8, касающиеся порядка мод и числа узлов в δr, а также ряда других закономерностей. С математической точки зрения, такое нарушение соотношений не должно удивлять, поскольку даже в приближении Каулинга уравнения нерадиальных адиабатических звездных пульсаций в общем случае не образуют системы уравнений Штурма — Лиувилля.

Запишем уравнения (17.84) (справедливые только в приближении Каулинга и для $\Gamma_1 = \text{const}$) в следующем виде:

$$dv/dr = \alpha(r)w, \tag{17.87а}$$

$$dw/dr = \beta(r)v, \tag{17.87б}$$

где величины $v(\propto \delta r)$ и $w(\propto \delta t)$ определены соотношениями (17.83) и где

$$\alpha(r) \equiv (S_l^2/\sigma^2 - 1)(\rho/\Gamma_1 P)r^2 P^{2/\Gamma_1}/\rho, \tag{17.88а}$$

$$\beta(r) \equiv (\sigma^2/N^2 - 1)(-Ag)\rho/r^2 P^{2/\Gamma_1}. \tag{17.88б}$$

Здесь S_l — *критическая акустическая частота*, определяемая соотношением

$$S_l^2 \equiv l(l+1)\Gamma_1 P/r^2\rho, \tag{17.89}$$

$N = (-Ag)^{1/2}$ — частота Брунта — Вяйсяля (разд. 17.2). Физически, величина $2\pi S_l^{-1}$ — это время, необходимое звуковой волне для прохождения вдоль окружности большого круга радиусом r расстояния, равного горизонтальной длине волны возмущения, $2\pi r/[l(l+1)]^{1/2}$ (см. разд. 17.12); S_l иногда называют *частотой Лэмба.*

Исходя из уравнений (17.87), можно выделить два качественно различных типа поведения решений v и w. Рассмотрим сначала только такой интервал $r_1 < r < r_2$, в пределах которого обе функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ сохраняют знаки. Кроме того, мы неявно предполагаем, что величина σ^2 каким-то образом известна (хотя бы приближенно), и поэтому на любом расстоянии от центра можно вычислить функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ (по крайней мере можно определить их знаки). Согласно одной из теорем сравнения Штурма (см., например, [282, §10.32]), v и w как функции радиуса могут осциллировать в интервале (r_1, r_2) только в том случае, если α и β имеют противоположные знаки. Это было отмечено Унно [591], а затем тщательно исследовано в работах [407, 503]; см. также [86, 507, 626].

Как видно из уравнений (17.88), противоположные знаки у функций α и β в интервале (r_1, r_2) могут иметь место в двух случаях:

1) σ^2 очень велико; точнее, $\sigma^2 > S_l^2, N^2$. Тогда $\alpha < 0$, а $\beta > 0$. [Здесь мы предполагаем, что $A < 0$ (лучистый перенос) и что $\sigma^2 \geqslant 0$. Эти предположения будут всегда подразумеваться, если не оговорено особо. О случаях, когда

эти предположения не выполняются, см. ниже и в конце разд. 17.8.] По причинам, которые будут указаны несколько ниже и в разд. 17.11, а также для соответствия терминологии, принятой в [407, 503], мы будем называть этот случай больших σ^2 акустическим случаем.

2) σ^2 очень мало; точнее, $\sigma^2 < S_l^2, N^2$. Тогда $\alpha > 0$, а $\beta < 0$, по крайней мере если $A < 0$ (лучистый перенос). В областях, где $A > 0$ (конвекция), величина β всегда положительна для $\sigma^2 > 0$, поскольку в этом случае $N^2 < 0$. Если $\sigma^2 > S_l^2$, то в таких областях мы имеем $\alpha < 0$ и $\beta > 0$. Как указано в [502], такие конвективные области должны охватывать самые внешние слои звезды. Эта возможность скорее относится к случаю (1). Для достаточно же малых σ^2 (в частности, $\sigma^2 < S_l^2$) α и β положительны в конвективной области, и поведение решений v и w должно быть таким, как описывается ниже для случая (3). Случай малых σ^2 мы будем называть гравитационным случаем.

Наконец, рассмотрим еще одну возможность:

3) σ^2 имеет промежуточное значение; точнее, σ^2 лежит между S_l^2 и N^2. Тогда величины α и β будут одного знака: обе положительны, если $N^2 < \sigma^2 < S_l^2$, и обе отрицательны, если $S_l^2 < \sigma^2 < N^2$. Этот случай мы будем называть смешанным случаем. Отметим, что термины «акустический» и «гравитационный» связаны с определенными свойствами p- и g-мод (разд. 17.8).

В случаях (1) и (2) функции v и w могут быть осциллирующими (в пространстве), и тогда поведение решений во времени производит впечатление распространяющихся (бегущих) волн. В случаях (3) функции v и w не осциллируют и принято говорить, что поведение решений во времени соответствует исчезающим волнам [407].

Чтобы иметь примерное представление о типах решений уравнений (17.87), которые можно получить в трех упомянутых случаях, временно пренебрежем зависимостью α и β от r и будем считать их постоянными*. Тогда из уравнений (17.87а,б) легко получить два дифференциальных уравнения второго порядка, каждое из которых содержит только одну зависимую переменную. Например, будем иметь

$$d^2v/dr^2 = \alpha\beta v \tag{17.90}$$

и точно такое же уравнение для w. Если предположить, что v и w пропорциональны $\exp(ikr)$, где k — локальное радиальное волновое число, то получим

$$k^2 = -\alpha\beta = -(S_l^2/\sigma^2 - 1)(\rho/\Gamma_1 P)(\sigma^2/N^2 - 1)(-Ag). \tag{17.91}$$

Видно, что в случае (1) (когда σ^2 больше S_l^2 и N^2) $k^2 > 0$, т.е. функции $v(\propto \delta r)$ и $w(\propto \delta t)$ осциллируют в пространстве, а поэтому поведение решений во времени соответствует распространяющимся акустическим волнам. Действительно, как следует из уравнения (17.91), при $\sigma^2 \to \infty$ $k^2 \to \sigma^2(\rho/\Gamma_1 P)$;

*Более общий случай, когда α и β не постоянны, легко рассмотреть с помощью обычной замены переменных. Таким способом общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка, как, например, уравнение (17.85а), всегда можно представить в «нормальном» виде $d^2f/dr^2 + \gamma(r)f = 0$, где $\gamma(r)$ — некоторая функция от r; см., например, [222, § 59].

это — дисперсиоиное соотношенне для обычиых звуковых волн. В случае (2) (когда σ^2 меньше S_l^2 н N^2) снова нмеем $k^2 > 0$, т.е. сиова получаем осциллирующие решеиия, которые соответствуют распростраияющимся гравитацноиным волнам. При $\sigma^2 \to 0$ волиовое число k должио стать очеиь большим, и поэтому даниый случай соответствует возмущеииям с очеиь короткими длииами волн в радиальиом направлении. Одиако в горизоитальиом направлениии длины волн значительио больше [см. ниже уравиеиие (17.96)]. Накоиец, в случае (3) (когда σ^2 имеет промежуточиое зиачеиие между S_l^2 н N^2), $k^2 < 0$, т.е. функции v и w не осциллируют н соответствуют иераспространяющимся (нсчезающим) волнам. В таких областях звезды амплнтуда волиы может экспоненциально убывать.

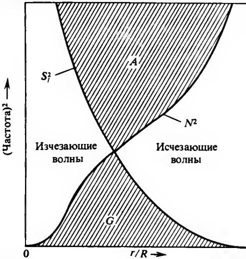


РИС. 17.4. Схематичное поведеиие квадрата критической акустической частоты S_l^2 [уравнеиие (17.89)] и квадрата частоты Бруита — Вяйсяля N^2 [уравиеиие (17.13)] вдоль отиосительного радиуса r/R в «простой» звездной модели. Символы A и G указывают соответствеиио акустическую и гравитациоииую области, в которых решеиия уравнеиий (17.87) являются осциллирующими в пространстве и соответствуют распространяющимся волнам.

Как же измеияются частоты S_l и N в сферической звезде вдоль радиуса? Ясио, что при $r \to 0$ $S_l \to \infty$, а вблизи поверхности $(r \approx R)$ $S_l^2 \propto P/\rho$. Обычно отношеиие P/ρ вблизи поверхиости становится малым или обращается в нуль. Расчеты показывают, что величииа S_l^2, как правило, более или меиее моиотоиио убывает от бескоиечиости в центре до очеиь малого значеиия на поверхиости. С другой стороиы, A можно записать в виде произведеиия медлеиио измеияющейся функции от r (которая постояниа в случае политроп) и обратной величины локальиой высоты одиородиой атмосферы, т.е. величииы $\rho g/P$ для звезды в гидростатнческом равиовесии, где g — локальиое ускореиие силы тяжести. Поскольку при $r \to 0$ $g \propto r$, мы имеем $|A| \propto r$, т.е. $N^2 = -Ag \propto r^2$ прн $r \to 0$. Вблизи поверхиости $N^2 \propto \rho/P$, т.е. N^2 стаиовит-

ся большим или даже стремится к бесконечности. Таким образом, N^2 изменяется от нуля в центре до большого или бесконечно большого значения на поверхности. Расчеты показывают, что для простых звездных моделей увеличение N^2 от центра к поверхности происходит более или менее монотонно и кривые для S_l^2 и N^2 пересекаются в некоторой промежуточной точке. Для более реалистичных моделей кривая N^2 может быть немонотонной и негладкой, поскольку величина A представляет собой разность двух производных.

Кривые S_l^2 и N^2 как функции r схематически показаны на рис. 17.4 для простой звездной модели. В этом случае акустическая (A) и гравитационная (G) области четко разделяются по частоте. Для таких моделей мода f может быть представлена на рис. 17.4 горизонтальной линией, проходящей вблизи точки пересечения кривых S_l^2 и N^2. Все p- или g-моды также могут быть представлены на этом рисунке горизонтальными линиями. Для p-мод горизонтальные линии лежат выше точки пересечения, а для g-мод — ниже. К таким простым моделям применимы соотношения между порядком моды и числом узлов, а также большинство общих замечаний, высказанных в разд. 17.8. Графики, подобные рис. 17.4, Осаки [407] назвал «диаграммами распространения»; они широко используются геофизиками при изучении распространения волн в океанах и земной атмосфере (см., например, [194, 580, 581]).

В работе [503] приведены кривые S_l^2 и N^2 для политропы индекса 3 при $l = 2$ и $\Gamma_1 = 5/3$, которые напоминают рис. 17.4. Эта модель, по-видимому, достаточно проста, и поэтому для нее справедливы вышеупомянутые замечания.

Однако для более сложных моделей, примером которых может служить политропа с показателем 4, мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 17.5 для $l = 2$ и $\Gamma_1 = 5/3$ [503]. В этом случае области A и G уже не разделяются четко по вертикали: существует довольно большой интервал промежуточных частот, охватывающий моду f и несколько примыкающих к ней низших p- и g-мод, для которых внутренние части звезды попадают преимущественно в область G, а внешние — в область A. Эти моды с промежуточными частотами имеют смешанный характер: они подобны гравитационным волнам во внутренних частях звезды и акустическим волнам — во внешних частях. Отметим, что функция δr может иметь узлы сразу в обеих областях A и G (рис. 17.5). Как указано в [503], рассмотрение областей A и G позволяет объяснить появление дополнительных узлов и смешанный характер этих мод промежуточной частоты, особенности которых отмечались в начале данного раздела применительно к политропам с высокой концентрацией вещества к центру. Объяснение этих свойств, представленное в [454], по существу такое же, хотя и выражено в других понятиях. Примеры диаграмм распространения можно найти в работах [18, 19, 409, 508, 509, 593].

Основной причиной того, почему для моделей с более высокой концентрацией вещества к центру N^2 имеет два четко выраженных экстремума, является, вероятно, большое влияние локального ускорения силы тяжести g. Для подобных моделей ускорение g имеет сильный максимум приблизительно на таком уровне, глубже которого заключена большая часть массы звезды. Сила тяготения там настолько велика, что частота Брунта — Вяйсяля оказыва-

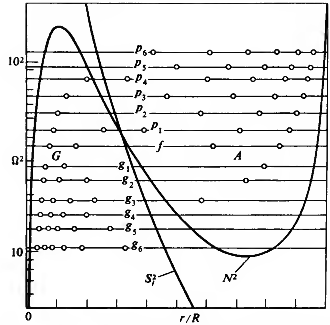


РИС. 17.5. Квадрат безразмерной угловой частоты Ω^2 для политропы показателя 4 в зависимости от относительного радиального расстояния r/R [503]. Сплошные кривые — квадраты частот S_l^2 для $l = 2$ [уравнение (17.89)] и N^2 для $\Gamma_1 = 5/3$ [уравнение (17.13)]. В представленном случае нет четкого разделения областей A («акустическая») и G («гравитационная») по вертикали: существует довольно большой интервал «промежуточных» частот, для которых внешние части звезды лежат преимущественно в области A, а внутренние — в области G. Горизонтальные прямые — квадраты собственных частот для отмеченных мод; кружки показывают положение узлов функции δr.

ется относительно высокой. Снаружи от этого уровня ускорение g изменяется приблизительно как r^{-2}, а вблизи центра звезды $g \propto r$. Такое поведение g, а также отмеченные ранее в данном разделе свойства величины A, по-видимому, и объясняют основные качественные особенности кривой N^2, представленные на рис. 17.5.

Отметим, что для частот выше и ниже двух экстремумов N^2 осцилляции собственных функций полностью сосредоточены в областях A или G соответственно. Кроме того, как указал Леду [338], чем больше степень l, тем ближе к поверхности располагается внутренняя граница области A, поскольку S_l пропорционально $l(l + 1)$ [см. уравнение (17.89)]. Осаки [407] отметил, что эволюция умеренно массивных звезд главной последовательности ($\sim 10M_\odot$), в которых по мере расходования водорода масса конвективного ядра уменьшается, может приводить к возникновению непосредственно над конвективным ядром относительно тонкой области с непрерывным про-

странственным изменением химического состава. В этой области средняя молекулярная масса μ возрастает с глубиной, а значит, растет и $(-A)$ [см. уравнение (17.15)] (вещество становится еще более устойчивым относительно конвекции), и, следовательно частота Брунта — Вяйсяля $N = (-Ag)^{1/2}$ оказывается относительно большой. Эта ситуация изображена в [407, 408] на нескольких диаграммах распространения, соответствующих различным эволюционным стадиям (см. также рис. 17.6). Диаграммы показывают сильно выступающее трапециевидное продолжение области G в зону с непрерывным пространственным изменением химического состава, и в ходе эволюции этот пик становится все выше и шире (пример представлен на рис. 17.6). Как было указано выше, большое значение N приводит к тому, что в этой области собственные функции становятся осциллирующими, как впервые отметил Осаки [407] ($\sigma^2 < S_l^2, N^2$). Такое поведение собственных функций в областях с непрерывным изменением химического состава Осаки назвал «захватом» гравитационных мод. Он также уподобил эти обособленные области потенциальным ямам, часто рассматриваемым в квантовой механике.

Осаки [407] обнаружил еще одно сравнительно новое явление (по крайней мере, в отношении пульсирующих звезд). Оно проявляется в виде резких ступенчатых изменений безразмерных частот нерадиальных мод в процессе эво-

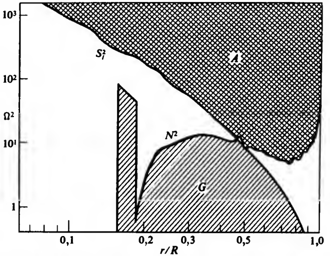
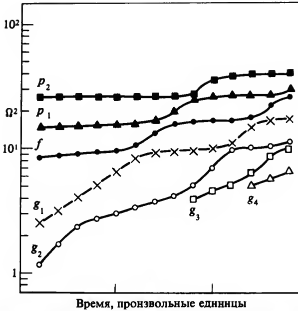


Рис. 17.6. Квадрат критической акустической частоты S_l^2 [уравнение (17.89)] для $l = 2$ и частоты Брунта — Вяйсяля N^2 [уравнение (17.13)] в зависимости от относительного радиуса r/R для модели звезды $10M_{\odot}$, в конвективном ядре которой доля водорода по массе уменьшилась до 0,48 [407]. Обе частоты безразмерные, выражены в единицах GM/R^3. Обратите внимание на дополнительный трапециевидный пик в области G, имеющий место в зоне, окружающей конвективное ядро. В этой зоне химический состав непрерывно изменяется в пространстве, причем средняя молекулярная масса μ возрастает с глубиной. Возрастание μ с глубиной приводит к росту величины $(-A)$ в указанной области [см. уравнение (17.15)].



РНС. 17.7. Безразмерные частоты нерадиальных мод с $l = 2$ в завнсимости от времени (в пронзвольных еднницах) для эволюционирующей модели звезды массой $10M_\odot$ (нз работы [407]).

люцнн звезды (рнс. 17.7). Согласно Осакн, этн резкне нзменення связаны с появленнем в ходе эволюцнн новых узлов в зоне непрерывно нзменяющегося химнческого состава. Качественно аналогнчное явленне рассматрнвалось в посвященной однородно вращающимся нзотермнчным газовым цилнндрам работе [254], авторы которой назвалн этот эффект «подскакнваннем» мод.

Эффект «подскакнвання» рассмотрен в важной работе [13] на основе взанмодейтвня «g-подобных» н «p-подобных» мод (см. также [86, 507]).

17.11. Фазовые диаграммы

«Фазовыми днаграммами» Осакн [407] н Скуфлер [503] назвали кривые на плоскости $v - w$ (илн $\delta r - \delta t$), вдоль которых текущий радиус r нграет роль параметра. Как впервые отметили Осакн н Скуфлер, такне фазовые диаграммы с большой наглядностью демонстрнруют некоторые качественные характернстнкн аднабатических нерадиальных колебанний, нсследованных в предыдущем разделе.

Качественную картнну изменення v н w на такой фазовой днаграмме можно получить, счнтая $\alpha(r)$ н $\beta(r)$ постояннымн. Следуя Осакн [407], умножнм

уравненне (17.87а) на βv, а уравиеиие [17.87б) на αw, и затем вычтем одио уравненне нз другого. Тогда после ннтегрнровання получим

$$\beta v^2 - \alpha w^2 = \text{const}. \tag{17.92}$$

Еслн α н β — одного знака, что нмеет место в областн нсчезающих волн (разд. 17.10), то соотношенне (17.92) является уравненнем гиперболы. Если α и β — противоположного зиака, что нмеет место в акустнческой (A) нлн гравитациоииой (G) областях (разд. 17.10), то (17.92) есть уравиенне эллипса. В более общем случае, когда $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ — перемениые, фазовые кривые оказываются более сложнымн, чем гнпербола нлн эллнпс, но нх основные качественные особенностн прн соответствующнх знаках α н β не отлнчаются от опнсанных выше.

С нзмеиеннем r изображающая точка на фазовой диаграмме перемещается в соответствнн с уравненнямн (17.87). Для акустнческнх волн, т.е. в областн A, где $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, эта точка с возрастаиием r опнсывает кривую против часовой стрелкн, а для гравнтацнонных волн, т.е. в областн G, где $\alpha > 0$ н $\beta < 0$ — по часовой стрелке. Граннчиое условне (17.62) требует, чтобы v и w нмелн однаковый знак в цeнтре звезды ($r = 0$). Пользуясь произвольиостью нормнровки, зиак обычно выбирают положительиым. Тогда точка, представляющая иа фазовой диаграмме центр звезды, располагается в первом квадранте.

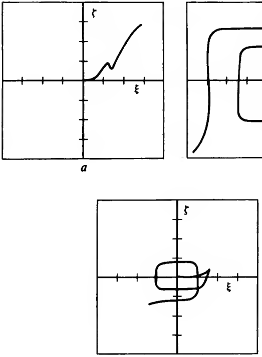
Напомннм, что в настоящем разделе мы нспользуем (только для простоты изложення) приближенне Каулннга (разд. 17.9), которое,по-видимому, ие нзменяет математнческой прнроды задачн (см. [345, §79]).

На поверхностн звезды ($r = R$) граннчное условне в прнблнженнн Каулннга можно взять в внде $\delta t = \delta r/\Omega^2$ [см. соотиошеиие (17.72)]. Такнм образом, до тех пор пока $\Omega^2 > 0$ (а это будет предполагаться почти во всех ннтересующих нас случаях), v н w должны быть одного зиака н на поверхностн звезды. Поэтому иа фазовой диаграмме точка, соответствующая поверхностн, должна лежать в первом илн третьем квадраитах.

Итак, прн увелнченнн r от 0 до R нзображающая точка иа фазовой днаграмме должна иачать свое двнженне в первом квадранте, затем двнгаться по спнралн по часовой стрелке или протнв часовой стрелкн в завнсимостн от того, является лн рассматрнваемая область соответственно областью G или A, и, наконец, закоичнть движеине лнбо в первом, лнбо в третьем квадранте. Как отмечено в [407, 503], для простых звездных моделей чнсло, показывающее, сколько раз изображающая точка пересекает ось w (т.е. сколько раз δr обращается в иуль), равно порядку моды.

В этой схеме моде f приписывается номер 0, моде p_n — иомер $+n$, а моде g_n — номер $-n$. Причем $+n$ соответствует числу пересеченнй осн w (нли δt) при двнженнн протнв часовой стрелки, а $-n$ — по часовой стрелке, если двнженне пронсходит в направленнн увелнчення r. Отметнм, что в согласин с замечаииямн, сделанными в разд. 17.8, эта схема требует, чтобы для p-мод самый внутреиннй узел функции δr лежал блнже к центру, чем соответствующий узел функции δt, а для g-мод нмеет место обратиое.

Этн выводы пронллюстрированы на фазовых днаграммах, представлен-



рнс. 17.8. Фазовые диаграммы для мод f (*а*), p_3 (*б*) н g_3 (*в*) прн $l = 2$ н $\Gamma_1 = 5/3$ для политропы показателя 3 [503]. Величины ξ и ζ определяются уравиеииями (17.93) и эквивалеитиы величинам v и w соответствеиио. Каждое делеиие оси соответствует измеиеиию ξ или ζ иа едииицу. Точка $\xi = 0$, $\zeta = 0$ соответствует цеитру звезды ($r = 0$), а движение вдоль кривой из начала коордииат соответствует росту r. Дополнительные объясиеиия см. в тексте.

ных на рнс. 17.8 н соответствующих квадрупольным ($l = 2$) модам f, p_3 н g_3 для полнтропы показателя 3 н прн $\Gamma_1 = 5/3$. Переменные ξ н ζ, представленные на рнсунках, определяются соотношеннямн

$$\xi = \pm \lg(1 + |\delta r/R|), \tag{17.93а}$$

$$\zeta = \pm \lg(1 + |RP'/(GM\rho)|), \tag{17.93б}$$

где знакн перед логарнфмамн выбнраются так, чтобы онн совпадалн со знакамн δr н P' соответственно, а все снмволы нмеют обычный смысл. Отметнм, что велнчнна ξ аналогнчна v нлн δr, а ζ — w нлн δt.

Однако для более сложных моделей траекторня изображающей точкн на фазовой днаграмме оказывается более нзвнлнстой, н это, вероятно, неуднвнтельно. Прнмером могут служнть фазовые днаграммы, представленные на

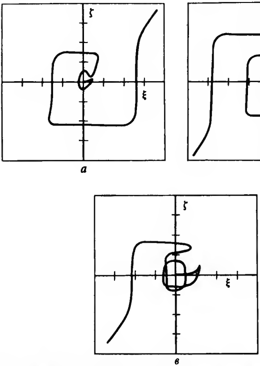


Рис. 17.9. То же, что на рис. 17.8, но для политропы показателя 4 ($l = 2$, $\Gamma_1 = 5/3$) [503]. *а* — *f*-мода, *б* — p_3-мода, *в* — g_3-мода.

рис. 17.9 для колебаний политропы с показателем 4 при $\Gamma_1 = 5/3$ и $l = 2$ (из работы [503]). Отметим, что в согласии с предыдущими замечаниями изображающая точка движется в областях G вдоль спирали по часовой стрелке, а в областях A — против часовой стрелки. Осаки [407] и Скуфлер [503] высказали мысль, что традиционную схему классификации мод, только что описанную для простых звездных моделей, можно сохранить и для более сложных моделей, по крайней мере при $l = 2$, если для каждой моды вычесть число пересечений оси w (или ζ или δt) при движении по часовой стрелке из числа пересечений этой оси при движении против часовой стрелки, причем движение происходит в направлении увеличения r. Например, для моды p_3 в случае политропы с показателем 4 число пересечений оси ζ при движении (с возрастанием r) против часовой стрелки равно 4, а число пересечений по часовой стрелке равно 1, т.е. имеем $4 - 1 = 3$.

Сибахаси и Осаки [508] ввели альтернативную схему классификации мод, в которой был учтен двойственный характер «захвата» нерадиальных колебаний (разд. 18.3). Вольф [626] предложил еще одну схему классификации, несколько похожую на предыдущую, но основанную в значительной степени на свойствах p- и g-мод высокого порядка.

Осаки [407] представил фазовые диаграммы, соответствующие модам g_2, g_1, f, p_1, p_2 при $l = 2$ для модели звезды с массой $10 M_\odot$ на начальной главной последовательности, а также диаграммы, соответствующие модам g_1, f, p_1 на более поздней стадии эволюции той же модели, но эти диаграммы мы здесь воспроизводить не будем. Другие примеры фазовых диаграмм можно найти в книге Унно и др. [593].

17.12. Нерадиальные колебания для мод очень высокого порядка

В настоящем разделе мы представим некоторые приближенные результаты для мод очень высокого порядка, т.е. таких, для которых $l \gg 1$ и (или) очень велико радиальное волновое число $k = 2\pi/$(«длина волны» вдоль радиуса), например по сравнению с r^{-1} или λ_P^{-1}(λ_P — локальная высота однородной атмосферы, равная $P/(\rho g)$ для звезды в гидростатическом равновесии). В этом случае, а также потому, что рассмотрение лишь приближенное, можно считать критическую акустическую частоту S_l [уравнение (17.89)], частоту Брунта — Вяйсяля N [уравнение (17.13)] и адиабатическую скорость звука постоянными и каждый раз приписывать им значения, соответствующие определенной области в звезде. Эти различные области будут рассмотрены ниже в настоящем разделе, а также в разд. 17.13 и 18.2. Кроме того, в пределе коротких длин волн мы воспользуемся приближением Каулинга (разд. 17.9) и предположим, по крайней мере в начале рассмотрения, что изменение каждой из зависимых переменных (скажем, v или w; см. разд. 17.9) вдоль радиуса пропорционально $\exp[ikr]$. Основанием для последнего предположения служит то, что в пределе очень коротких волн все коэффициенты дифференциальных уравнений остаются почти постоянными на расстояниях порядка длины волны, а частные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеют экспоненциальный вид. Тогда из дифференциальных уравнений следует соотношение (17.91), где все величины считаются постоянными. Нерадиальные колебания высокого порядка были рассмотрены также в работах [21, 86, 507]*.

Предположим теперь, что угловая частота колебаний σ определяется в основном физическими условиями в какой-то одной области звезды, и возьмем значения S_l, N и $\Gamma_1 P/\rho$ в (17.91) соответствующими именно этой области. В этом случае при заданных k соотношение (17.91) можно рассматривать как квадратное уравнение относительно σ^2; его решение имеет вид

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{2}[S_l^2 + N^2 + k^2\Gamma_1 P/\rho] \times \times \left\{1 \pm \left[1 - \frac{4S_l^2N^2}{(S_l^2+N^2+k^2\Gamma_1 P/\rho)^2}\right]^{1/2}\right\}, \qquad (17.94)$$

где мы предположили, что знаменатель не равен нулю.

---

*Тщательное рассмотрение нерадиальных колебаний высокого порядка выполнила также М. Тассуль, Astrophys. J. Suppl., 43, 469, 1980.

Решенне со знаком плюс в (17.94) дает значення σ^2 для p-мод, а со знаком мннус — для g-мод, по крайней мере в рассматрнваемом случае мод высокого порядка. Предположнм, что величнна $|N^2|$ мала в сравненнн с любым нз двух другнх слагаемых в знаменателе в (17.94). Можно показать, что такого предположения достаточно, чтобы гарантнровать малое значенне второго члена под знаком квадратного корня. Пренебрегая этнм членом, получаем для p-мод высокого порядка

$$\sigma_p^2 \approx [l(l + 1)/r^2 + k^2]\Gamma_1 P/\rho. \tag{17.95}$$

Величнну $l(l + 1)/r^2$ ннογда называют квадратом «горнзонтального» волнового чнсла возмущення.

Прнведенное выраженне показывает, н это неудивнтельно, что σ_p возрастает с увелнченнем как l, так н k. Кроме того, нз (17.95) вытекает фнзнческн приемлемый результат, что еслн $l(l + 1)/r^2$ значнтельно меньше k^2, т.е. еслн для p-мод «вертнкальная длина волны» мала в сравненнн с «горнзонтальной», то значенне σ_p почтн на завнснт от l, по крайней мере в рассматрнваемом пределе, в частностн, прн $l = 0$ (чнсто раднальные колебання) мы нмеем $\sigma_p^2 \approx k^2\Gamma_1 P/\rho$, т.е. соотношенне для обычных звуковых волн (см. разд. 5.5 н 17.10).

Для g-мод высокого порядка можно разложнть квадратный корень в ряд с точностью до первого порядка относнтельно упомянутого малого члена. В этом прнблнженнн получнм

$$\sigma_g^2 \approx \frac{l(l + 1)/r^2}{l(l + 1)/r^2 + k^2} N^2. \tag{17.96}$$

Мы замечаем, во-первых, что в рассматрнваемой областн звезды σ_g^2 нмеет тот же знак, что н $(-A)$, причем мы предполагаем, что только одна эта область звезды определяет значенне σ_g. Поэтому $\sigma_g^2 > 0$ (дннамическая устойчнвость) соответствует $A < 0$ (устойчнвость относнтельно конвекцнн). И напротнв, $\sigma_g^2 < 0$ (дннамнческая неустойчнвость) соответствует $A > 0$ (конвективная неустойчивость). Как мы увиднм нnже в данном разделе, в последнем случае величнна, обратная $|\sigma_g^2|$, пропорциональна квадрату характерного временн жнзнн конвектнвного элемента.

Во-вторых, еслн l фнкснровано, а $k \to \infty$, то $\sigma_g^2 \propto 1/k^2 \to 0$, что согласуется с асимптотнческим поведеннем g-мод высокого порядка, опнсанным в разд. 17.8. Аналогично, $\sigma_g^2 = 0$ прн $l = 0$ н пронзвольном (но не равном нулю) значеннн k. Данный результат — проявленне того факта, что g-моды не могут существовать прн чнсто раднальном двнженни. Еслн k фнкснровано, а $l \to \infty$, то нз соотношення (17.96) следует, что $\sigma_g^2 \approx N^2$. Другнмн словами, в этом пределе фнкснрованной «вертнкальной длнны волны» н пронзвольно малой «горнзонтальной длнны волны» частота σ_g перестает завнсеть от l н прнблнзнтельно равна частоте Брунта — Вяйсяля*. Однако прежде чем это осуществнтся, велнчнна l, возможно, должна стать очень большой в завнснмостн от k (см. в конце разд. 18.3). Фнзнчески прнведенный результат попро-

*См. следующую сноску.

сту отражает тот факт, что N связано только с вертикальными колебаниями элемента массы в стратифицированной жидкости. Указанный предел $l \to \infty$ соответствует наличию большого числа близко расположенных струй опускающегося и поднимающегося вещества. Однако сделанный вывод о независимости σ_g от l при больших l и фиксированном k неприменим к однородной (с постоянной плотностью) сжимаемой модели. Полученное в разд. 17.7 аналитическое решение показывает, что в этом пределе $|\sigma_g| \propto l^{1/2}$*. Далее, из (17.96) следует, что $\sigma_g^2 \sim N^2$, если $k^2 \sim l(l+1)/r^2$, т.е. если вертикальное и горизонтальное волновые числа, соответственно k и $[l(l+1)]^{1/2}/r$, сравнимы между собой. В этом случае мы, как и в разд. 17.2, имеем дело с периодической структурой жидкости, элементы которой имеют примерно одинаковые размеры во всех направлениях.

Наконец, в-третьих, интересно рассмотреть для мод высокого порядка (большие k) соотношение между фазовой скоростью $v_{ph} = -\sigma/k$ и групповой скоростью $v_{gr} = -d\sigma/dk$ (см., например, [51, 288]). (Знак минус обусловлен здесь принятой зависимостью от времени: $\exp[+i\sigma t]$.) Ясно, что если v_{ph} не зависит от вертикальной длины волн $2\pi/k$, то $v_{gr} = v_{ph}$.

В случае p-мод высокого порядка получаем

$$|v_{ph}| = [l(l+1)/r^2k^2 + 1]^{1/2}(\Gamma_1 P/\rho)^{1/2}, \tag{17.97}$$

откуда следует, что если l фиксировано, а $k \to \infty$, то v_{ph} перестает зависеть от k. Таким образом, в данном случае $v_{gr} \to v_{ph}$.

В случае g-мод высокого порядка получаем

$$|v_{ph}| = [l(l+1)/r^2]^{1/2}(N/k^2)[1 + l(l+1)/r^2k^2]^{-1/2}, \tag{17.98}$$

откуда следует, что если l фиксировано, а $k \to \infty$, то $v_{ph} \propto 1/k^2$. Поэтому в данном случае $v_{gr} \to -v_{ph}$, т.е. для g-мод высокого порядка при фиксированном значении l скорости v_{gr} и v_{ph} имеют противоположные знаки.

Некоторые свойства p- и g-мод высокого порядка можно вывести следующим образом. Используем линеаризованные уравнения нерадиальных неадиабатических пульсаций, чтобы получить общие выражения для $\delta t/\delta r$, где δt — тангенциальная, или трансверсальная, составляющая вектора $\delta\mathbf{r}$ (разд. 17.3), а также для $\delta\rho/\rho$ — относительной лагранжевой вариации плотности. Затем рассмотрим эти выражения в высокочастотном ($\sigma^2 \to \infty$, p-моды высокого порядка) и низкочастотном ($\sigma^2 \to 0$, g-моды высокого порядка) пределах. Такой подход позволит легче понять, почему движения элементов массы становятся почти «вертикальными», или радиальными, для высоких частот, и почти «горизонтальными», или трансверсальными, для низких частот.

---

*Кристенсен-Далсгаард [86] на примере политропных моделей показал, что σ_g^2 не зависит от l при больших l, только если показатель политропы больше 2,191, т.е. только в тех случаях, которые соответствуют, по его словам, «модам, захваченным вблизи локального максимума величины N^2». Согласно [86], в полных самосогласованных моделях звезд поведение σ^2 при больших l оказывается в действительности намного более сложным, чем в наших оценках. Например, для любой звездной модели существует класс мод, захваченных вблизи поверхности, у которых σ приблизительно пропорционально $l^{1/2}$.

Начием с выражения (17.33) для δt, которое в случае сферической звезды, иаходящейся в гидростатическом равиовесии, можио представить через лагранжевы вариации δP и $\delta\psi$. Запишем $\delta\psi = \psi' - \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{g}$, где $\mathbf{g} = -\mathbf{e}_r Gm(r)/r^2$ — локальное ускорение силы тяжестн. Далее, с помощью модинамического тождества (5.35а) выразим δP через $\delta\rho$ и δs (лагранжевы вариации плотиости и удельной энтропии соответственно). В результате будем иметь соотношеиие, выражающее δt через $\delta\rho$, δs, $\delta\mathbf{r}$, ψ' и $\mathbf{g}$. С помощью уравнеиия неразрывностн (17.27) $\delta\rho$ можно выразить через $\partial(r^2\delta r)/r^2\partial r$ н δt. Решая полученное уравиеиие отиосительио δt и деля результат иа δr, получаем

$$\left[1-\frac{\Gamma_1 P}{\rho}\frac{l(l+1)}{\sigma^2 r^2}\right]\frac{\delta t}{\delta r}=-\frac{1}{\sigma^2 r}\frac{\Gamma_1 P}{\rho}\frac{1}{\delta r}\frac{\partial(r^2\delta r)}{r^2\partial r}+$$

$$+\frac{(\Gamma_3-1)T\delta s}{\sigma^2 r\delta r}-\frac{1}{\sigma^2 r}\frac{\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{g}}{\delta r}+\frac{1}{\sigma^2 r}\frac{\psi'}{\delta r}. \quad (17.99)$$

Аналогичиым образом получаем выраженне для $\delta\rho/\rho$

$$[1-(\Gamma_1 P/\rho)l(l+1)/\sigma^2 r^2]\delta\rho/\rho = -\partial(r^2\delta r)/r^2\partial r +$$
$$+ [l(l+1)/\sigma^2 r^2][(\Gamma_3-1)T\delta s - \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{g}+\psi']. \quad (17.100)$$

В дальиейшем мы в основном будем предполагать, что зиачение l фиксировано. Рассмотрнм сначала высокочастотиый предел, $\sigma^2 \to \infty$ (p-моды высокого порядка). В этом случае вторые члеиы в квадратиых скобках в левых частях уравиеиий (17.99) и (17.100) становятся преиебрежимо малыми. Кроме того, очеиь малыми становятся и три последиих члеиа в правых частях обоих уравнеиий [это очевидно для всех упомянутых члеиов,за исключеиием первого из них в правой части (17.99); но можио показать, что и он оказывается малым]; во всяком случае, величинами δs и ψ' преиебрегают прн аднабатических колебаниях в приближеиии Каулинга (разд. 17.9).

Прежде всего отметим, что в рассматриваемом высокочастотиом пределе как $\delta t/\delta r$, так и $\delta\rho/\rho$ становятся иезависимыми от l. Далее, выражеиие для $\delta\rho/\rho$ в этом пределе оказывается точио таким же, как и в случае чисто радиальиых колебаний, указывая иа то, что высокочастотиые колебания в основиом радиальиые. В частиости, если замеиить $\partial/\partial r$ иа ik, то в пределе коротких воли ($kr \gg 1$) получим

$$\delta\rho/\rho \approx -ik\delta r, \quad (17.101)$$

откуда следует, что для таких акустических волн величииы δr и $\delta\rho$ различаются по фазе приблизительио иа 90°.

В первом члеие правой части уравиеиия (17.99) для таких p-мод высокого порядка можио записать $\sigma_p^2 \approx k^2\Gamma_1 P/\rho$ [что верио при $k^2 \gg l(l+1)/r^2$] н $\partial(r^2\delta r)/r^2\partial r \approx ik\delta r$. Тогда, преиебрегая последиими тремя члеиами в правой части (17.99) (поскольку σ^2 велико), получаем

$$\delta t/\delta r \approx -i/(rk). \quad (17.102)$$

Отсюда видно, что для исследуемых мод величина $|\delta t/\delta r|$ — порядка отношения вертикальной длины волны возмущения к текущему радиусу r; а в настоящем рассмотрении это отношение считается малым. Таким образом, как и указывалось выше, p-моды высокого порядка соответствуют почти вертикальным, или продольным, колебаниям. Отметим также, что δt отстает по фазе относительно δr на 90°, т.е. частицы совершают движение по эллипсам, большие оси которых ориентированы по вертикали.

Рассмотрим теперь низкочастотный предел, $\sigma^2 \to 0$ (g-моды высокого порядка). В этом случае второй член в скобках в левой части уравнения (17.99) становится большим, и это уравнение можно сократить на множитель σ^{-2}. Оставляя в правой части только первый член и записывая $\partial(r^2\delta r)/r^2\partial r \approx ik\delta r$, получаем

$$\delta t/\delta r \approx irk/[l(l+1)]. \tag{17.103}$$

Таким образом, для g-мод очень высокого порядка (большие k) отношение $|\delta t/\delta r|$ — порядка числа вертикальных длин волн, укладывающихся на радиальном расстоянии r; а в настоящем рассмотрении это отношение считается большим. Следовательно, такие g-моды очень высокого порядка представляют собой преимущественно горизонтальные, или трансверсальные, движения, как и указывалось выше. Отметим, что сдвиг фаз между δt и δr отличается от сдвига фаз между ними же для p-мод очень высокого порядка ровно на π [ср.(17.103) с (17.102)]. Поэтому в рассматриваемом случае частицы также движутся по приблизительно эллиптическим траекториям, но в противоположном по сравнению с p-модами направлении, причем большие оси эллипсов ориентированы горизонтально.

Некоторый интерес в случае g-мод высокого порядка представляет и выражение для $\delta\rho/\rho$. Из уравнения (17.100), предполагая $P/(\rho\sigma^2 r^2) \gg 1$, получаем

$$\delta\rho/\rho \approx -(1/\Gamma_1)(\delta r/\lambda_P) - (\Gamma_1 g\lambda_P)^{-1}[(\Gamma_3 - 1)T\delta s + \psi'], \tag{17.104}$$

где λ_P — локальная высота однородной атмосферы. Это выражение показывает, что в отличие от p-мод высокого порядка величина $|\delta\rho/\rho|$ с увеличением k не возрастает (т.е. становится независимой от вертикальной длины волны). Кроме того, видно, что на величину $|\delta\rho/\rho|$ для g-мод высокого порядка могут оказывать сильное влияние неадиабатические эффекты (большое $|\delta s|$).

В физической разумности сделанных выше выводов о свойствах вертикальных и горизонтальных движений элементов массы в случаях соответственно p- и g-мод высокого порядка можно убедиться также из следующих соображений.

Полную силу, действующую на заданный элемент массы, а значит, и его ускорение, всегда можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие. При нерадиальных колебаниях отношение величины горизонтальной составляющей к величине вертикальной составляющей зависит в каждый момент времени только от отклонения возмущенной конфигурации от сферической формы. Если возмущенные величины предполагаются пропорциональными сферическим гармоникам, то мерой такого отклонения от сферичности служат индексы l и m. (Однако поскольку $|m| \leqslant l$, то в последу-

ющих рассуждениях достаточно принимать во внимание лишь l.) В общем случае l при $m = 0$ равно числу полных «волн», укладывающихся на окружности любого круга, лежащего в меридиональной плоскости. В любой заданный момент времени горизонтальные силы (вызываемые гравитацией и наличием горизонтальных градиентов давления) возрастают по отношению к радиальным силам с увеличением l. Однако в предыдущих рассуждениях значение l предполагалось заданным и поэтому относительная величина горизонтальных сил оставалась фиксированной, т.е. по существу не зависящей от частоты.

Далее, при очень высоких частотах полные ускорения элементов массы должны быть относительно большими. Поскольку, как указано выше, горизонтальные ускорения элементов массы слабо зависят от частоты, полные ускорения, а значит,и перемещения элементов массы в таком высокочастотном пределе должны быть почти вертикальными.

При очень низких частотах полные ускорения элементов массы должны быть относительно невелики. Поскольку и в этом случае зависимость горизонтальных ускорений или сил от частоты слабая, вертикальные компоненты должны быть относительно малыми. Поэтому движение элементов массы должно быть преимущественно горизонтальным. Грубой механической аналогией в земных условиях может служить тело, скользящее без трения по наклонной плоскости, составляющей очень малый угол θ с горизонтальной поверхностью. В этом случае для очень малых θ отношение горизонтального и вертикального перемещений тела составляет $\mathrm{ctg}\theta \approx 1/\theta$.

Из настоящего рассмотрения следует и выражение для величины $(P'/P)/(\delta r/r)$. Используя (17.33), запишем

$$(P'/P)/(\delta r/r) = \sigma^2 r^2(\rho/P)\delta t/\delta r - [\psi'/(\delta r/r)]\rho/P. \tag{17.105}$$

В случае g-мод высокого порядка можно использовать для σ^2 выражение (17.96), а для $\delta t/\delta r$ — соответствующую предельную форму уравнения (17.99). Однако при однородном химическом составе $|A| \approx |\nabla - \nabla_{\mathrm{ad}}|/\lambda_P$ (разд. 17.2), где λ_P — локальная высота однородной атмосферы. Примем также $r/\lambda_P \sim 1$ и отбросим член, содержащий ψ' (приближение Каулинга); в результате получим

$$\frac{P'/P}{\delta r/r} \sim \frac{|\nabla - \nabla_{\mathrm{ad}}|}{\lambda_P}\,\frac{k}{k^2 + l(l+1)/r^2}. \tag{17.106}$$

Согласно этому выражению, при $k \to \infty$ или $l \to \infty$ $|(P'/P)/(\delta r/r)| \to 0$. Другими словами, для g-мод очень высокого порядка относительные вариации давления в данной точке (*эйлеровы* вариации давления) становятся значительно меньше относительных смещений элементов жидкости в указанной точке. Это напоминает предположения, обычно используемые в традиционных теориях конвекции, основанных на концепции длины перемешивания. Перейдем к обсуждению тесной связи между g-модами высокого порядка и конвекции.

С этой целью воспользуемся формулой $N^2 = -Ag$ и выражением (17.15)

для A, где примем среднюю молекулярную массу μ постоянной в пространстве, и подставим N^2 в приближенное выражение (17.96) для σ_g^2, в котором множитель перед N^2 примем равным единице (нас интересует лишь оценка по порядку величины). Примем также $\chi_T \sim \chi_p \sim 1$, $g \sim GM/R^2$, $\lambda_p \sim R$. В результате для g-мод высокого порядка получаем

$$|\sigma_g| \sim |\nabla - \nabla_{ad}|/t_{ff}, \tag{17.107}$$

где $t_{ff} \sim (R^3/GM)^{1/2}$ — время свободного падения (см. гл. 2). Данная оценка для $|\sigma_g|$ — того же порядка, что и вытекающее из теории длины перемешивания обратное время жизни конвективного элемента в конвективной зоне звезды (см., например, [146, Ch. 14]). Это обусловлено тем, что время жизни конвективного элемента равно по порядку величины $|N|^{-1}$. Связь между g-модами высокого порядка и конвективной неустойчивостью рассматривалась также в работе [538].

17.13. Весовые функции

Использование интегральных соотношений, выведенных в гл. 8 для определения с помощью «весовых функций», какие части звезды наиболее сильно влияют на значение периода пульсаций, оказалось исключительно эффективным в случае радиальных колебаний (см. [204] и разд. 8.13). Теперь этот метод обобщен на случай нерадиальных колебаний (см., например, [242, 498]), и мы рассмотрим его, следуя в основном работе Шванка [498].

Шванк применил этот метод только к политропам с показателями от 1 до 4; использованные им весовые функции основаны на интегральных выражениях, приведенных в гл. 15 и 16 для случая адиабатических нерадиальных колебаний.

Отметим, что знаменатель интегрального выражения для σ^2 включает в себя интеграл (осцилляторный момент инерции)

$$J = \int_V \boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{\xi} \rho r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi, \tag{17.108}$$

где $\boldsymbol{\xi} \equiv \delta \mathbf{r}$. Мы отбросили здесь индекс 0 у невозмущенных величин и выразили элемент объема $d\tau$ в сферических координатах. Интеграл J пропорционален полной кинетической энергии колебаний в рассматриваемой моде. Разложим вектор $\boldsymbol{\xi}$ на три составляющие в ортогональной системе координат [см. формулу (17.19)] и предположим, что каждая составляющая пропорциональна сферической гармонике (разд. 17.3) и $\exp(i\sigma t)$. Используя свойства сферических гармоник, после небольших преобразований получим

$$J = \text{const} \cdot \int_0^R [(\delta r)^2 + l(l+1)\chi^2/(\sigma^4 r^2)] 4\pi\rho r^2 dr, \tag{17.109}$$

где значение постоянной может зависеть от чисел l и m. Если бы мы имели дело с более общим случаем неадиабатических колебаний, то величины $(\delta r)^2$, χ^2 и σ^4 следовало бы заменить на $|\delta r|^2$, $|\chi|^2$ и $|\sigma^2|^2$ соответственно.

Легко видеть, что при $l = 0$ этот результат сводится к соответствующему

результату для чисто радиальных колебаний (см. гл. 8). В подынтегральном выражении член, связанный с l,— это вклад в кинетическую энергию на единицу массы, обусловленный трансверсальными (или «горизонтальными») компонентами движения осциллирующих элементов вещества. Если использовать безразмерную переменную $x = r/R$, то интеграл в (17.109) становится интегралом в пределах от 0 до 1 от функции, которую Шваик [498] обозначил $g(x)$. Аналогичное подынтегральное выражение в числителе интегральных соотношений («весовую функцию») Шванк обозначил $f(x)$.

Оказалось, и это, вероятно, неудивительно, что частоты p-мод определяются главным образом условиями во внешних слоях звезд. И наоборот, частоты g-мод определяются в основном условиями в глубоких звездных недрах. Наконец, все области звезды вносят приблизительно одинаковый вклад в частоты f-мод.

17.14. Времена затухания

В этом разделе мы запишем выражение для коэффициента устойчивости, выведенное двумя различными способами в гл. 16, специально для случая нерадиальных колебаний. Как указано выше (разд. 17.3), будем предполагать, что любая скалярная величина, связанная с возмущением, пропорциональна сферической гармонике.

Зависимость всех возмущений от времени дается выражением (16.23). В частности, непериодический множитель имеет вид $\exp(-\varkappa t)$, где вещественная величина $\varkappa$, коэффициент устойчивости, в случае «малой» неадиабатичности дается выражением (9.13), в котором величина C определяется из (16.21). Напомним, что $|\varkappa|^{-1}$ — это характерное время нарастания или затухания амплитуды колебаний.

Величину $\delta\rho/\rho$, входящую в C, можно вычислить с помощью уравнения неразрывности (17.27). Рассмотрим теперь величину $\delta[\varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]$. Используя соотношение (5.16) между эйлеровой и лагранжевой вариациями, получаем

$$\delta[\varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho] = \delta\varepsilon + \mathcal{E}(\delta\rho/\rho) - (\mathcal{E}/\rho_0)(d\rho_0/dr)\delta r - \\ - (\nabla \cdot \mathbf{F}')/\rho_0 - \delta r\, d\mathcal{E}/dr, \quad (17.110)$$

где индекс 0 относится к невозмущенной конфигурации, предполагаемой сферически симметричной. Величина $\mathcal{E}$ определяется соотношением

$$\mathcal{E} \equiv [(\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]_0 = (dL_r/dm)_0, \quad (17.111)$$

где $L_{r,0} = 4\pi r^2 F_0$ — текущая светимость (количество энергии, выходящее в единицу времени с поверхности сферы радиуса r), причем F_0 — радиальный (и единственный) компонент вектора потока энергии $\mathbf{F}_0$; величина m — обычная массовая переменная.

Чтобы представить $\nabla \cdot \mathbf{F}'$ в явном виде, предположим, что поток $\mathbf{F}$ — только лучистый и определяется уравнением типа уравнения диффузии

$$\mathbf{F} = -K\nabla T, \quad (17.112)$$

где коэффициент лучистой теплопроводности K в общем случае зависит от ρ и T [см. выражение (17.117)]. Ограничиваясь уравнением вида (17.112), мы тем самым ограничиваемся рассмотрением только глубоких звездных недр; более общий анализ проведен, например, в [19]. Если взять эйлерову вариацию от $\mathbf{F}$, выразить $\nabla \cdot \mathbf{F}'$ в соответствии с (17.32), а $\delta\rho/\rho_0 (= -\nabla \cdot \delta\mathbf{r})$ в соответствии с (17.27), и затем подставить эти результаты в (17.110), то получим

$$\begin{aligned}\delta[\varepsilon - (\nabla \cdot \delta\mathbf{F})/\rho] = \delta\varepsilon - \mathscr{E}\partial(r^2\delta r)/(r^2\partial r)] + \\ + \mathscr{E}[l(l+1)/(\sigma^2 r^2)](P'/\rho_0 + \psi') - (\mathscr{E}/\rho_0)\delta r\, d\rho_0/dr - \\ - (4\pi r^2\rho_0)^{-1}\partial[4\pi r^2(\mathbf{F}')_r]/\partial r + \\ + [l(l+1)/(4\pi\rho_0 r^3)][L_{r,0}/(d\ln T_0/d\ln r)]T'/T_0 - \delta r\, d\mathscr{E}/dr. \quad (17.113)\end{aligned}$$

Чтобы упростить это выражение, введем формальную величину L_r, определяемую соотношением

$$L_r = 4\pi r^2(\mathbf{F})_r, \tag{17.114}$$

где $(\mathbf{F})_r$ — радиальная составляющая потока энергии $\mathbf{F}$. Поскольку в любой момент времени $(\mathbf{F})_r$ в общем случае зависит от полярных углов θ и ϕ, то аналогичным образом зависит и L_r. Следовательно, L_r можно интерпретировать как такое мгновенное значение текущей светимости для сферы радиуса r, которое получилось бы, если бы величина $(\mathbf{F})_r$, взятая при заданных r, θ и ϕ, оставалась неизменной для всех точек этой сферы (т.е. при любых θ и ϕ).

Возьмем от L_r лагранжеву вариацию и используем соотношение (5.16) между обоими типами вариаций. После небольших преобразований мы придем к соотношению, из которого можно выразить величину $4\pi r^2(\mathbf{F}')_r$ через δL_r и δr. В результате получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi r^2\rho_0}\frac{\partial[4\pi r^2(\mathbf{F}')_r]}{\partial r} = \frac{L_{r,0}}{4\pi r^2\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\delta L_r}{L_{r,0}}\right) + \\ + \mathscr{E}\frac{\delta L_r}{L_{r,0}} - \mathscr{E}\frac{\partial(r^2\delta r)}{r^2\partial r} - \frac{\mathscr{E}}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}\delta r - \delta r\frac{d\mathscr{E}}{dr}. \quad (17.115)\end{aligned}$$

При подстановке (17.115) в (17.113) видим, что многие члены сокращаются, и в результате, опуская индекс 0, имеем

$$\begin{aligned}\delta\left(\varepsilon - \frac{\nabla\cdot\mathbf{F}}{\rho}\right) = \delta\varepsilon + \mathscr{E}\left[\frac{l(l+1)}{\sigma^2 r^2}\left(\frac{P'}{\rho} + \psi'\right) - \frac{\delta L_r}{L_r}\right] - \\ - \frac{L_r}{4\pi r^2\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\delta L_r}{L_r}\right) + \frac{l(l+1)L_r}{4\pi\rho r^3}\frac{1}{(d\ln T/d\ln r)}\frac{T'}{T}. \quad (17.116)\end{aligned}$$

При $l = 0$ это уравнение сводится к соответствующему уравнению для чисто радиальных колебаний. В правой части уравнения (17.116) есть два члена,

включающих l. Первый из них обусловлен вариацией $\delta\rho/\rho$, а второй — горизонтальными потоками тепла, которые могут иметь место при нерадиальных колебаниях.

Наконец, получим явное выражение для $\delta L_r/L_r$ в случае нерадиальных колебаний. Возьмем лагранжеву вариацию от обеих частей уравнения (17.114), используя при этом уравнение (17.112) для $\mathbf{F}$, а также следующее соотношение для коэффициента лучистой теплопроводности K:

$$K = (4ac/3)T^3/(\varkappa\rho). \tag{17.117}$$

При взятии лагранжевой вариации от K учтем выражение (17.27) для $\delta\rho/\rho_0$. Снова отбрасывая индексы 0, после некоторых преобразований получим

$$\delta L_r/L_r = 4\delta r/r + 4\delta T/T - \delta\varkappa/\varkappa + [T/(dT/dr)]\partial(\delta T/T)/\partial r - [l(l+1)/\sigma^2 r^2](P'/\rho + \psi'). \tag{17.118}$$

Очевидно, что при $l = 0$ это выражение сводится к соответствующему выражению (7.11а) для чисто радиальных колебаний, справедливому в случае, когда перенос энергии рассматривается в приближении лучистой теплопроводности. Отметим, что в (17.118) член, включающий l, обусловлен только вариацией $\delta\rho/\rho$, которая в случае нерадиальных колебаний может быть связана с горизонтальными движениями элементов массы.

В квазиадиабатическом приближении все величины в уравнениях (17.116) и (17.118) вычисляются с учетом адиабатических соотношений между $\delta P/P$, $\delta\rho/\rho$ и $\delta T/T$. Эти величины в свою очередь определяются, как описано выше в настоящей главе, с использованием собственных функций линейных адиабатических нерадиальных колебаний. Однако соотношения (17.116) и (17.118), которые являются просто тождествами, справедливы и для линейных неадиабатических нерадиальных колебаний и будут использованы в следующей главе.

Численные результаты квазиадиабатических расчетов коэффициента устойчивости можно найти во многих работах, например [407, 408, 508, 509, 593]. Соответствующие характерные времена нарастания или затухания амплитуды колебаний составляют, как правило, от долей года до $10^5 - 10^7$ лет в зависимости от моды колебаний и от рассматриваемой модели звезды.

ГЛАВА 18
ЛИНЕЙНЫЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗД

В реальных звездах как радиальные, так и нерадиальные колебания, вообще говоря, являются неадиабатическими, т.е. в процессе колебаний элементы массы приобретают и теряют тепло. Для нерадиальных колебаний неадиабатические эффекты могут оказаться более важными, чем для радиальных, и причина здесь в следующем. Нерадиальные колебания могут происходить с очень низкой частотой, как в случае g-мод высокого порядка (см. гл. 17). Или же очень малой может быть длина волны, связанная с возмущением, как это

имеет место в некоторых областях довольно сложных моделей (см. разд. 17.10). В обоих случаях создаются особенно благоприятные условия для обмена теплом между элементами массы. Несмотря на это, неадиабатичностью нерадиальных колебаний обычно пренебрегают в основном, вероятно, из-за математической сложности задачи, а также потому, что неадиабатические эффекты обычно относительно малы в большей части массы звезды. Как уже отмечалось в разд. 17.4 (см. также разд. 18.1), задача о линейных нерадиальных неадиабатических колебаниях в математическом смысле эквивалентна решению системы дифференциальных уравнений 6-го порядка в комплексных переменных, или 12-го порядка в вещественных переменных. В случае же малых адиабатических нерадиальных колебаний мы имеем систему лишь 4-го порядка в вещественных переменных. И даже такая адиабатическая задача достаточно сложна и насыщена информацией. Многие особенности этой задачи начинают проясняться только теперь (см., например, [12, 86, 507, 626]), и несомненно в данной области предстоит еще многое сделать. Поэтому о неадиабатических эффектах нерадиальных колебаний известно довольно мало. Вследствие этого наши замечания в настоящей главе неизбежно будут либо очень краткими, либо не совсем уверенными или, возможно, и теми и другими вместе.

В разд. 18.1 мы сделаем несколько замечаний о порядке уравнений, о граничных условиях для неадиабатических колебаний и т.п., а также отметим, что неадиабатические эффекты, если только они не слишком велики, не изменяют основных характеристик p- и g-мод. В разд. 18.2 будет проведен «локальный» анализ (в приближении коротких длин волн). Будет показано, что выражения для σ^2, полученные в разд. 17.12 для p и g-мод высокого порядка, при учете неадиабатических эффектов заметно не изменяются, если только эти эффекты не слишком велики. Кроме того, такой анализ даст некоторую информацию об устойчивости мод. Наконец, в разд. 18.3 мы рассмотрим несколько новых теоретических работ, касающихся линейных неадиабатических нерадиальных колебаний.

18.1. Порядок уравнений и граничные условия

Тот факт, что в математическом смысле задача малых нерадиальных неадиабатических колебаний оказывается задачей 6-го порядка (по пространственным координатам) в комплексных переменных, или 12-го порядка в вещественных переменных (см. разд. 17.4), можно интерпретировать еще и следующим образом. Мы замечаем, что в случае сферической звезды для любой моды можно провести разделение переменных, причем угловую зависимость (θ, ϕ) каждой скалярной переменной, связанной с возмущением, можно выразить через сферические гармоники. В результате каждое векторное уравнение оказывается эквивалентным лишь одному скалярному дифференциальному уравнению. В обсуждаемой задаче имеются три векторных дифференциальных уравнения первого порядка: уравнения импульса, потока энергии и одно из двух уравнений Пуассона ($\mathbf{f}' = -\nabla\psi'$, где $\mathbf{f}$ — сила тяготения на единицу массы, а штрих обозначает, как обычно, эйлерову вариацию). В силу сказан-

иого выше, для сферической звезды этн уравнения эквивалентны трем скалярным диффереициальным уравнениям первого порядка. Трн других уравнения (каждое из которых первого порядка по пространственным координатам) уже и так являются скалярнымн дифференциальнымн уравнениямн. Это уравиение иеразрывностн, уравненне энергии н второе уравнеиие Пуассоиа $\nabla \cdot \mathbf{f}' = -4\pi g\rho'$. Всего мы имеем, таким образом, шесть скалярных дифференциальных уравиеинй первого порядка для шестн комплексиых перемеиных, скажем P', ρ', δr, ψ', $d\psi'/dr$ н L_r'.

Отметим, что, как н в случае аднабатических иерадиальных колебанний сферической звезды, иеадиабатические иерадиальные колебания такой звезды ие завнсят от порядка m сферической гармоники, т.е. неадиабатнческие собственные частоты также $(2l + 1)$-кратно вырождены.

Рассмотрнм теперь граничиые условия. Как можно ожидать, таких условий шесть: трн в центре и три иа поверхности. Четыре из иих (два в центре и тических колебаниях появляется дополинтельный вектор, напрнмер эйлероадиабатических колебанний (см. разд. 17.6), а два остальных имеют следующий смысл.

Дополиительиое граничное условие в цеитре связано с тем, что в неаднабатических колебаниях появляется дополнительный вектор, иапример эйлерова вариация $\mathbf{F}'$ полиого потока эиергии. В уравиение эиергии входнт дивергенция этой величины $\nabla \cdot \mathbf{F}'$, которая, очевидио, должна оставаться конечной в центре звезды. Величиիу $\mathbf{F}'$ можно вычислнть, взяв эйлерову вариацию от уравиеиия диффузии, скажем, в виде (17.112) (более общий анализ проведеи в [19]). Тогда вблизи центра

$$T' \propto r^l. \tag{18.1}$$

В разд. 17.6 было показано, что граничные условия в центре требуют $P' \propto r^l$ вблизи $r = 0$ (лишь в этом случае велнчнны $\nabla \cdot \delta\mathbf{r}$ и $\nabla^2\psi'$ остаются конечными). Соотношенне (18.1) вместе с уравнением состояния ($P' = \chi_\rho\rho' + \chi_T T'$) озиачает, что вблнзи цеитра также и $\rho' \propto r^l$. Отсюда (и из других соображеиий; разд. 18.2) следует, что основиые характеристики нераднальных колебаний, получеииые в адиабатическом приближенин, при учете неадиабатнческих эффектов существенно не изменяются, по крайней мере еслн этн эффекты малы.

Дополиительиое граннчное условне иа поверхности включает в себя относительные вариации светимости, раднуса и температуры (наряду, быть может, и с другими перемеиными). Здесь возможны два случая в зависимости от принятой иевозмущеииой модели. В одиом случае модель нмеет фотосферу (хотя и определяемую приближеиио), и тогда температура поверхностн несильио отличается от эффективной температуры T_e. В другом случае модель характеризуется иулевой температурой поверхности. В любом случае можио записать, по крайней мере формально, что $L_r = 4\pi r^2(\mathbf{F})_r$ [см. формулу (17.114)], где L_r — текущая светимость иа расстоянии от центра r, а $(\mathbf{F})_r$ — радиальиая составляющая вектора полиого потока эиергии $\mathbf{F}$. Как отмечалось в разд. 17.14, для иерадиальных колебаний величина L_r имеет несколько иной смысл, чем для радиальных колебаний, и является несколько ис-

кусственной. Тем не менее можно формальио определить L_r, как указаио, и, взяв от нее лагранжеву вариацию, получить выражение для $\delta L_r/L_r$ через $\delta r/r$ и $(\delta \mathbf{F})_r/(\mathbf{F})_r$.

Далее, в первом случае (для модели с фотосферой) можно предположить, что $(\mathbf{F})_r \propto B(T) \propto T^4$, где $B(T)$ — проинтегрированная по частоте функция Планка (T — температура), и тогда

$$\delta L_r/L_r = 2\delta r/r + 4\delta T/T. \tag{18.2}$$

Коиечно, все величниы здесь относятся к поверхности модели, тогда как внутрн звезды $\delta L_r/L_r$ следует вычислять нсходя из соотиошенӣ, используемых для потока энергии (например, получениых в прнближеинн лучнстой теплопроводностн; см. нцже). В уравнение эиергнн [см., напрнмер, (17.116)], кроме самой величины $\delta L_r/L_r$ входнт ее пространственная производная.

Уравнеине (18.2) можно также получнть, еслн предположнть, как в [19] нлн [475], что иа поверхность звезды извне не падает инкакое нзлучеиие.

Во втором случае (когда температура иа поверхности моделн равна нулю) прнблнженне лучнстой теплопроводностн также предполагается справедлнвым всюду внутри звезды, т.е. под поверхностью $\delta L_r/L_r$ можно вычнслнть способом, описанным в разд. 17.14 [уравнение (17.118)]. Еднественное условие, которое мы должны принять иа поверхности, — это, что величнна $\partial(\delta T/T)/\partial r$ остается там конечной (индекс 0 у невозмущенных величин отброшен). Тогда из (17.118) получаем

$$\delta L_r/L_r = 4\delta r/r + 4\delta T/T - \delta \varkappa/\varkappa - [l(l+1)/\sigma^2 r^2](P'/\rho + \psi'), \tag{18.3}$$

где все символы имеют обычный смысл. Это и есть граннчное условие иа поверхностн для светнмостн, которое следует использовать во втором случае [вместо (18.2) в первом случае]. Прн этом предполагается, конечио, что справедливо прнближение лучистой теплопроводности, на котором основана приведенная формула.

18.2. Локальный анализ

Локальиый аналнз часто позволяет получить миого полезной ннформации. Прн таком аиалнзе предполагают, что длина волиы возмущения много меньше всех других характерных длин задачн (например, высоты однородной атмосферы). Однако к результатам локальиого аналнза, особенно к выводам об устойчивости, всегда следует относнться осторожно: в вопросах устойчивостн в большинстве случаев с полной уверенностью можно полагаться только на нсследование поведения снстемы в целом (глобальный аналнз). Тем не менее результаты локального анализа часто оказываются правильиыми. Кроме того, локальиый аналнз, математически более простой, чем глобальиый, может дать иекоторое представленне о физнческой стороие явлення. Наконец, даже если локальный анализ не прнводнт к определенным результатам, он обычио указывает общие закономерности, которые могут быть качественно правильными.

Локальиый анализ был с успехом нспользован в работах [110, 163, 184,

237, 293, 313, 407] и других (см. также превосходное обсуждение у Леду [338]). Чаще всего их авторы интересовались низкочастотным пределом, относящимся к g-модам высокого порядка. В этом пределе обычно используют следующие предположения (они были сделаны и в большинстве упомянутых работ):

а. Считают справедливым приближение Каулинга, $\psi' = 0$ (разд. 17.9); как отмечалось в разд. 17.9, можно ожидать, что такое приближение является довольно хорошим для мод высокого порядка.

б. Жидкость предполагается несжимаемой, т.е.

$$\delta\rho = 0. \tag{18.4}$$

Вероятно, это условие должно быть хорошим приближением для рассматриваемых g-мод высокого порядка (см. [626]). Физически для таких мод движение оказывается настолько медленным, что любое появившееся в жидкости расширение или сжатие успевает рассосаться до такой степени, что условие (18.4) можно считать выполненным. Кроме того, как было показано в разд. 17.12, для g-мод высокого порядка $|\delta\rho|$ не слишком велико, и для очень коротковолновых мод оно становится независимым от длины волны. Следовательно, предположение $\delta\rho = 0$, возможно, оказывается неплохим приближением в случае относительно быстрых изменений в состоянии жидкости, связанных с g-модами высокого порядка (см. п. 18.2а). С другой стороны, для намного более медленных изменений, связанных с теплообменом, на $\delta\rho$ такого ограничения не налагается. Например, при нагревании жидкость может расширяться. (Это приближение, когда принимают $\delta\rho = 0$ для относительно быстрых изменений, но $\delta\rho \neq 0$ для относительно медленных изменений, является следствием «приближения Буссинеска»; см. [542].)

в. Во всех уравнениях, кроме уравнения движения, полагают $P' = 0$, т.е. пренебрегают эйлеровой вариацией полного давления. В уравнение же движения входит градиент этой вариации, и хотя сама величина $|P'|$ может быть малой, величина $|\nabla P'|$ может оказаться значительной [см. ниже замечания в связи с уравнением (8.18)]. Как отмечалось в разд. 17.2, пренебрежение величиной P' (но не $\nabla P'$) обычно оказывается превосходным приближением для g-мод высокого порядка.

При локальном анализе обычно пользуются локальной декартовой системой координат xyz с осью z, направленной вдоль радиус-вектора наружу.

Сначала мы проведем анализ специально для g-мод высокого порядка (п. 18.2а), учитывая предположения (а) — (в). Затем в п. 18.2б мы отбросим предположения (б) и (в), а значит, уже не будем ограничиваться g-модами высокого порядка; т.е. мы можем (и будем) рассматривать произвольно высокие частоты, связанные, например, с p-модами высокого порядка или звуковыми волнами. Конечно, этот более общий случай включает в себя, в частности, и случай g-мод высокого порядка.

Поскольку здесь мы имеем дело только с очень короткими волнами, будем предполагать, что все вариации пропорциональны $\exp[\sigma t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]$, где σ — комплексная угловая частота, а $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Выбор такой пространственной зависимости оправдывается теми же причинами, что и в

разд. 17.12, а именно: на расстояниях порядка длины волны все коэффициенты дифференциальных уравнений остаются почти постоянными. Мнимая часть величины σ дает угловую частоту колебаний, тогда как вещественная часть содержит информацию об устойчивости волны: если вещественная часть σ положительна, то это означает неустойчивость (колебательную неустойчивость); если же отрицательна, то устойчивость. Радиальную составляющую вектора **k** обозначим k_r (в гл. 17 эта составляющая обозначалась просто k), а тангенциальную — k_H:

$$k_H = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \tag{18.5}$$

где k_x и k_y — составляющие **k** вдоль осей x и y. Полное волновое число обозначим k_T:

$$k_T = (k_r^2 + k_H^2)^{1/2}. \tag{18.6}$$

В соответствии с принятой экспоненциальной зависимостью вариаций от времени и пространственных координат применение операторов дифференцирования к вариациям эквивалентно умножению на σ или $i\mathbf{k}$: $\partial/\partial t \to \sigma$, $\nabla \to i\mathbf{k}$ [исключение будет сделано в связи с уравнением (18.19)].

18.2а. НИЗКИЕ ЧАСТОТЫ

Выпишем теперь основные дифференциальные уравнения с учетом сделанных выше предположений. В приближении Каулинга [предположение (а)] уравнение импульса для радиальной составляющей смещения имеет вид

$$\sigma^2\delta r = -ik_r P'/\rho - \rho' g/\rho, \tag{18.7}$$

где принято, что $dP/dr = -\rho g$.

Уравнение неразрывности таково:

$$\delta\rho/\rho = -\nabla \cdot \delta\mathbf{r} = -\partial(\delta x)/\partial x - \partial(\delta y)/\partial y - \partial(\delta z)/\partial z =$$
$$= -ik_x\delta x - ik_y\delta y - ik_r\delta r, \tag{18.8}$$

где δx, δy и $\delta z \equiv \delta r$ — это компоненты вектора $\delta\mathbf{r}$ по осям x, y, z. Уравнения импульса для компонентов x и y имеют вид

$$\sigma^2\delta x = -ik_x P'/\rho, \quad \sigma^2\delta y = -ik_y P'/\rho. \tag{18.9}$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности, получаем

$$\delta\rho/\rho = 0 = -(k_H^2/\sigma^2)P'/\rho - ik_r\delta r, \tag{18.10}$$

где мы использовали предположение (б) о несжимаемости жидкости.

Теперь с помощью (18.10) можно исключить из уравнения (18.7) величину P'/ρ, что дает

$$\sigma^2(k_T^2/k_H^2)\delta r = -\rho' g/\rho. \tag{18.11}$$

Далее отметим, что, поскольку в течение «коротких» промежутков времени жидкость считается несжимаемой ($\delta\rho = 0$), $\rho'/\rho = -\delta r d\ln\rho/dr = -\delta r A$, так как $d\ln\rho/dr$ — это значение A (разд. 17.2) для несжимаемой жидкости ($\Gamma_1 = \infty$). Таким образом, имеем

$$\sigma^2 = (k_H^2/k_T^2)Ag, \tag{18.12}$$

причем $(-Ag)$ — это квадрат частоты Брунта — Вяйсяля (разд. 17.2). Данный результат совпадает с полученным в разд. 17.2 для g-мод высокого порядка.

Можно отметить, что если бы мы пренебрегли в уравнении импульса флуктуацией давления P', то получили бы $s^2 = Ag$ в точном согласии с результатом разд. 17.2, где предполагалось $P' = 0$. Как установил Гаф [245], флуктуации давления стремятся отклонить вертикальные движения жидкости в горизонтальном направлении.

Такой же результат (18.2) получился бы и в случае адиабатического движения сжимаемого вещества [т.е. движения, для которого выполняется уравнение (5.36а)], если по-прежнему исходить из предположения о малости длины волны возмущения по сравнению с локальной высотой однородной атмосферы. Но в этом случае потребовалось бы провести более громоздкие вычисления.

Однако, чтобы прийти к каким-либо выводам об устойчивости, необходимо допустить, что за большие интервалы времени под действием неадиабатических эффектов (приращений и потерь тепла) происходит изменение плотности ($\delta\rho \neq 0$). Чтобы определить $\delta\rho$ (или ρ'), нужно воспользоваться уравнением энергии. Возьмем его в следующем виде (см. гл. 5):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{T}\right) = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta P}{P}\right) + \frac{1}{c_P T}\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F}), \tag{18.13}$$

где c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Используя соотношение (5.16) между лагранжевой и эйлеровой вариациями, отбрасывая P' [предположение (в)] и учитывая, что $d/dt = \partial/\partial t$, поскольку невозмущенная жидкость покоится, мы можем переписать (18.13) как

$$sT'/T = s\mathscr{S}\delta r + (c_P T)^{-1}\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F}), \tag{18.14}$$

где

$$\mathscr{S} \equiv [(\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2]d\ln P/dr - d\ln T/dr \tag{18.15}$$

[см. также уравнение (18.31)].

Теперь надо выразить $\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F})$ как функцию ρ'/ρ, T'/T и других величин. Будем предполагать, что в невозмущенном состоянии система находится в тепловом равновесии, т.е. $(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F})_0 = 0$. Тогда нет никакого различия между лагранжевыми и эйлеровыми вариациями, и мы имеем

$$\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F}) = (\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F})' = \varepsilon' + (\rho'/\rho)\varepsilon_0 - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F}', \tag{18.16}$$

где ε_0 — скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы в невозмущенной модели; здесь мы еще раз [во втором члене в правой части (18.16)] использовали предположение, что невозмущенная модель находится в тепловом равновесии.

Чтобы найти величину ε', примем, что она зависит от ρ', T' и X', где X' — эйлерова вариация относительного содержания водорода по массе:

$$\varepsilon' = \varepsilon(\lambda\rho'/\rho + \nu T'/T + \alpha X'/X), \tag{18.17}$$

причем ε — скорость генерации энергии на единицу массы в невозмущенной модели (здесь и далее будем опускать индекс 0), коэффициенты λ и ν характеризуют степенную зависимость генерации энергии соответственно от плотности и температуры [соотношение (7.12)], а величина α определяется как

$$\alpha \equiv (\partial \ln \varepsilon / \partial \ln X)_{\rho,\, T}. \tag{18.18}$$

Для нахождения $\nabla \cdot \mathbf{F}'$ предположим, что выполняется уравнение типа уравнения диффузии [см. (17.112)], в котором коэффициент теплопроводности K (возможно, лучистой теплопроводности, см. разд. 18.1) будем считать постоянным. Однако если бы мы хотели учесть зависимость K от плотности и температуры, то было бы достаточно заменить в последующих выражениях λ на $\lambda - (\partial \ln K / \partial \ln \rho)_T$, а ν на $\nu - (\partial \ln K / \partial \ln T)_\rho$. Запишем теперь $\nabla \cdot \mathbf{F}'$ в следующем виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}' = -K\nabla \cdot \nabla[(T'/T) \cdot T] = -KT\nabla^2(T'/T) + 2\mathbf{F} \cdot \nabla(T'/T) + (T'/T)\nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Далее, в соответствии с тем, что все равновесные величины считаются по существу постоянными в пространстве, мы можем пренебречь вторым членом в правой части, поскольку $\mathbf{F} \propto \nabla T$. Однако член с $\nabla \cdot \mathbf{F}$ необходимо сохранить, иначе рассматриваемые физические эффекты будут сильно искажены. (Аналогичная ситуация имела место в гл. 13 в связи с однозонной моделью Бейкера, где мы рассматривали все физические переменные в пределах зоны как постоянные, за исключением L_r в уравнении энергии; если бы мы считали и L_r постоянной, то непоправимо исказили бы физическую картину явления.) Итак, можно выразить $\delta(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F})$ через ρ'/ρ, T'/T и X'/X. Подставив это выражение в уравнение энергии (18.14), приходим к следующему соотношению между T'/T, ρ'/ρ, X'/X и δr:

$$\{\sigma - [\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2]/c_p T\}(T'/T) =$$
$$= \sigma \mathcal{A} \delta r + [\varepsilon(\lambda + 1)/c_p T]\rho'/\rho + (\varepsilon\alpha/c_p T)(X'/X). \tag{18.19}$$

Чтобы получить другое соотношение между T'/T, ρ'/ρ и другими величинами, можно использовать уравнение состояния. Варьируя его по Эйлеру, имеем

$$P'/P = 0 = \chi_\rho \rho'/\rho + \chi_T T'/T + \chi_\mu \mu'/\mu, \tag{18.20}$$

где мы учли предположение (в), $P' = 0$; коэффициенты χ_ρ, χ_T и χ_μ определены в разд. 17.2, а μ — средняя молекулярная масса.

Полагая, что характерное время развития возмущений мало по сравнению с временем, необходимым для заметного изменения химического состава элемента массы вследствие термоядерных реакций (это время приблизительно равно характерному ядерному времени звезды), можно выразить μ'/μ и X'/X через δr, поскольку в этом случае $\delta\mu/\mu$ и $\delta X/X$ равны нулю, откуда

$$\mu'/\mu + \delta r d \ln \mu / dr = 0, \tag{18.21а}$$

$$X'/X + \delta r d \ln X / dr = 0. \tag{18.21б}$$

Теперь объединим вышеприведенные уравнения таким образом, чтобы по-

лучить дисперсиоииое соотиошение для σ. У иас есть три осиовиых уравнения: комбинированное уравиеиие иеразрывности и импульса (18.11), уравиеиие зиергии (18.19) и уравнеине состояиия (18.20). Еслн считать X'/X и μ'/μ выражеиными, согласио (18.21), через δr, то имеем три неизвестиых: ρ'/ρ, T'/T н δr. Таким образом, имеем систему трех лниейных одиородиых уравнеиий для трех нензвестных. Для существования нетривнальиого решеиия иеобходимо, чтобы определнтель снстемы обращался в иуль. Приравиивая определнтель нулю, мы и получим искомое дисперсионное соотношеиие, которое является уравиеиием третьей степенн относнтельио σ. После иекоторых упрощеиий его можно записать в виде

$$\sigma^3 - \{[\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2]/c_PT - (\chi_T/\chi_\rho)\varepsilon(\lambda + 1)/c_PT\}\sigma^2 - [(\chi_T/\chi_\rho)\mathscr{S} - (\chi_\mu/\chi_\rho)d\ln\mu/dr](k_H^2/k_T^2)g\sigma + \{-(c_PT)^{-1}[\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2](\chi_\mu/\chi_\rho)d\ln\mu/dr + (\chi_T/\chi_\rho)(\varepsilon\alpha/c_PT)d\ln X/dr\}(k_H^2/k_T^2)g = 0. \quad (18.22)$$

Обратнм вниманне на одно тождество. Если учесть определеиие $\mathscr{S}$(18.15) и некоторые термодинамические тождества, а также соотношение

$$d\ln P/dr = \chi_\rho d\ln\rho/dr + \chi_T d\ln T/dr + \chi_\mu d\ln\mu/dr, \quad (18.23)$$

которое вытекает из уравиеиия состояния звездного вещества, то можио показать, что

$$(\chi_T/\chi_\rho)\mathscr{S} - (\chi_\mu/\chi_\rho)d\ln\mu/dr \equiv d\ln\rho/dr - (d\ln P/dr)/\Gamma_1 \equiv A, \quad (18.24)$$

где A определеио в разд. 17.2 [формула (17.6)].

Рассмотрим сиачала очень малый «вековой» корень уравнения (18.22). Его зиачеиие так мало, что можио преиебречь степеиями σ выше первой. Этот корень равен

$$\sigma_{\text{secular}} = -1(-A)^{-1}\left[\frac{\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2}{c_PT}\frac{(-\chi_\mu)}{\chi_\rho}\frac{d\ln\mu}{dr} + \frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{\varepsilon\alpha}{c_pT}\frac{d\ln X}{dr}\right]. \quad (18.25)$$

Учитывая, что в случае устойчивости отиосительио коивекции $A < 0$ и что для реалистичных уравнеиий состояиия величииа χ_μ обычио также отрицательиа, мы видим из (18.25), что прн отсутствии термоядерных реакций ($\varepsilon = 0$) σ отрицательно (что свидетельствует об устойчнвостн), еслн справедливо нераведство $d\ln\mu/dr < 0$, обычио выполняющееся в процессе эволюцин звезды. Однако если $d\ln\mu/dr > 0$, то $\sigma > 0$, что свидетельствует о иеустойчивости отиосительио медлеииых, иапомииающих коивекцию движеиий, развивающихся с характерным тепловым временем. Такую иеустойчивость ниогда называют иеустойчивостью Рэлея — Тейлора. Оиа была иазвана также «теплообмеиной» неустойчнвостью (см., например, [586]) и еще «квазикоивекцией» [146, § 13.3 н S.23.2]. В [146, § 13.3] дано физическое объясиеиие этой неустойчивостн. Оио осиовано на том, что в областн, устойчивой относнтельио конвекцнн, на элемент вещества, медлеиио смещеииый нз положеиия равновесия, ие будут действовать ннкакие результирующие силы, такие, как неуравиовешенные выталкнвающие силы, приводящие к конвективной иеустойчивостн в обычиом смысле. Тем не менее в области с про-

странственным нзмененнем хнмнческого состава такой злемент будет нметь температуру, в общем случае отлнчную от температуры окружающей среды. Из-за зтой разностн температур злемент будет получать нлн терять тепло, что прнведет к дальнейшему смещенню злемента, а значнт, к дальнейшему нзмененню плотностн. В результате злемент либо медленно вернется к своему нсходному положенню (устойчивость), либо будет по-прежнему от него удаляться (неустойчнвость).

Еслн же, с другой стороны, $\varepsilon \neq 0$, то сделанные выводы могут нзменнться. Предположнм, напрнмер, что элемент медленно переместнлся наружу нз своего равновесного положення. Еслн он двнгался достаточно медленно, то давленне внутрн него всегда будет совпадать с давлением окружающей среды [предположенне (в)]. Кроме того, прн достаточно медленном двнженнн не могут появнться ннкакне неуравновешенные выталкивающие силы, т.е. плотность злемента также должна совпадать с плотностью окружающих слоев. Однако средняя молекулярная масса остается такой же, как на его первоначальном уровне. Поэтому еслн средняя молекулярная масса невозмущенной среды убывает наружу ($d\ln\mu/dr < 0$), как это обычно нмеет место, то при рассматриваемом перемещенни злемента его средняя молекулярная масса окажется больше, чем окружающих слоев. Следовательно, еслн уравненне состояння сколько-ннбудь напомннает закон ндеального газа, то температура злемента будет выше, чем температура окружающих слоев. Если бы не было нсточннков ядерной знергнн, то злемент просто терял бы тепло, охлаждался, сжнмался н в конце концов вернулся бы в свое нсходное положенне. Однако еслн нмеются ядерные нсточннки н еслн онн достаточно чувствнтельны к температуре (т.е. ν достаточно велнко) или достаточно интенснвны $[\varepsilon(\nu - 1) > (KT/\rho)k_T^2]$, то нзбыточная по сравненню с окружающей средой температура злемента прнведет к уснленному знерговыделению н, возможно, к дальнейшему нагреву, а следовательно, н к дальнейшему двнженню наружу. Другнмн словамн, вещество может оказаться неустойчивым относнтельно медленного перемешнвання, как и показывает уравненне (18.25).

Что же можно сказать теперь о члене с $d\ln X/dr$ в (18.25)? Этот член вносит отрнцательный (т.е. стабилнзнрующий) вклад в s, еслн $d\ln X/dr > 0$, как обычно бывает в зволюцноннрующей звезде. Конечно, величнны $d\ln X/dr$ н $d\ln\mu/dr$ связаны между собой. Предполагая, что μ завнснт только от относнтельных содержанні по массе водорода, гелия н остальных химнческих элементов, обозначая зти содержання соответственно X, Y, Z (см., напрнмер, [146, eq. (15.17)]) н счнтая Z постоянным, нмеем

$$d\ln\mu/dr = -\tfrac{5}{4}\mu X d\ln X/dr. \qquad (18.26)$$

Следовательно, увелнченне X в направленнн наружу будет вызывать уменьшение μ наружу. Пронсхожденне знака мннус в правой частн (18.25) легко понять. Элемент вещества нмеет химическнй состав, соответствующий тому уровню в звезде, на котором этот злемент образовался. Таким образом, еслн в невозмущенной среде X возрастает наружу н еслн злемент двнжется также наружу, то X в нем будет, очевндно, меньше, чем в окружающих слоях. Поскольку водород счнтается основным ядерным топлнвом, то нз-за поннжен-

ного значення X энерговыделенне в элементе будет менее ннтенсивным по сравнеиию с окружающей средой. Таким образом, этот эффект способствует остыванию элемеита, его сжатию н тем самым возвращенню на первоиачальный уровень, т.е. делает двнжеине более устойчнвым (отрнцательный вклад в σ). (О прнмененнн этих результатов к проблеме возможного перемешнвания Солнца см., иапример, в разд. 19.6.)

Рассмотрнм теперь корнн уравиения (18.22), соответствующне g-модам высокого порядка, для которых $|\sigma|$, вероятно, также мало, но тем не менее оно много больше, чем $|\sigma_{\text{secular}}|$. Сначала рассмотрнм аднабатическнй предел, считая, что неаднабатическне эффекты малы. Формальио этому предельному случаю соответствует $\varepsilon = 0$ и $K = 0$ в уравиенин (18.22). Тогда коэффнциеиты при четных степенях σ (включая нулевую) обратятся в нуль. Обозначим корнн уравнення (18.22) в этом пределе как σ_0. Предполагая, что $\sigma_0 \neq 0$, нмеем

$$\sigma_0 = \pm i(k_H/k_T)(-Ag)^{1/2}, \tag{18.27}$$

где $(-Ag)^{1/2}$ — частота Брунта — Вяйсяля (разд. 17.2).

Запншем теперь

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma, \tag{18.28}$$

где прнмем, что $|\Delta\sigma| \ll |\sigma_0|$. Подставляя (18.28) с учетом (18.27) в (18.22) и преиебрегая степенямн $|\Delta\sigma|$ выше первой, можно решнть уравненне отиосительио $\Delta\sigma$. Отмечая, что $\chi_\rho c_P = \Gamma_1 c_V$ (разд. 4.2) н нспользуя тождество (18.24), получаем

$$\Delta\sigma = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathscr{S}}{A}\frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{\varepsilon(\nu-1)-(KT/\rho)k_T^2}{c_PT} - \frac{1}{A}\frac{\varepsilon\alpha}{c_PT}\frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{d\ln X}{dr} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{\varepsilon(\lambda+1)}{c_PT}\right], \tag{18.29}$$

что по существу согласуется с результатами Осакн [407]. Прн отсутствии нсточннков ядериой энергнн ($\varepsilon = 0$) имеем

$$\Delta\sigma = -\tfrac{1}{2}(\mathscr{S}/A)(\chi_T/\chi_\rho)(KT/\rho)k_T^2/c_PT. \tag{18.30}$$

На осиове соотношения (18.15) можно записать

$$\mathscr{S} = (\nabla - \nabla_{\text{ad}})/\lambda_P, \tag{18.31}$$

где λ_P — локальная высота однородиой атмосферы, $\nabla \equiv d\ln T/d\ln P$, $\nabla_{\text{ad}} \equiv (\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2$. Это выражеиие необходнмо сравннть с выраженнем (17.15) для A. В областях однородиого хнмнческого состава $\mathscr{S}$ н A совпадают, еслн $\chi_T/\chi_\rho = 1$ (что выполняется для ндеального газа), н нз (18.30) следует, что любые колебання в конце коицов затухают. То же самое пронсходнт н в случае иеоднородного химического состава, если вещество устойчиво относнтельно конвекции в обычиом смысле, т.е. если $A < 0$ и $\mathscr{S} < 0$ (действнтельиый градиеит температуры меиьше адиабатического); тогда $\Delta\sigma < 0$. Одиако если $A < 0$, но $\mathscr{S} > 0$ (температурный градиеит сверхадиабатический), то, согласио (18.30), $\Delta\sigma > 0$ и нмеет место колебательная конвекция с иарастающей амплитудой (см. ннже), впервые обнаружеиная Като [293]. Вероятно, такое явление должно возннкать в полуконвектнвных зоиах. Его физическое объяснение представлеио в [146, § S. 23.2]. Коротко говоря, элемент вещества, адиа-

батически смещенный, иапрнмер, вглубь от своего равиовесиого положения, при $A < 0$ будет иметь меиьшую плотиость, чем окружающие слои. Тогда результирующая архимедова снла будет выталкивать его обратно (иаружу), и вещество будет устойчиво относительио коивекции в обычиом смысле. Однако если $\mathscr{S} > 0$, то элемеит, смещеииый вглубь, будет холодиее окружающего вещества,и поэтому он начиет иагреваться. Нагревание приведет к расширеиию элемеита, что еще сильнее поннзит его плотиость. Таким образом, благодаря поступлеиию тепла выталкивающая сила иемиого увеличится, т.е. последующее движеине иаружу будет происходнть быстрее, чем в отсутствие иагрева. Следовательно, в рассматриваемом случае осциллирующий элемеит будет получать прн своих отклоиениях вглубь и иаружу дополиительиый «толчок», н очевидно, что такое двнженне будет колебательио неустойчивым. Его и иазывают «колебательной коивекцией с иарастающей амплитудой».

Аналогичиое рассмотреиие привело бы и к результатам работы [184], касающимся проблемы солиечиых иейтрино, если бы мы учлн должиым образом соответствующие физическне условия, т.е. еслн бы предположили, что ε' в (18.17) зависит также н от содержаиия нзотопа ^{3}He (см. [338]). Отметнм, что члеи с $d\ln X/dr$ способствует иеустойчивости, если ои положителеи в коивективно устойчивой областн ($A < 0$). (Если бы учитывался изотоп ^{3}He, то появился бы аналогичный член и с тем же зиаком для содержания по массе ^{3}He.) Физическая интерпретация этого результата такова. Рассмотрнм область, которая устойчива отиосительио коивекции в обычиом смысле ($A < 0$) и в которой, кроме того, $\mathscr{S} < 0$ (действительиый градиеит меиьше адиабатического), как это обычио имеет место. Тогда элемеит, который иемиого сдвииулся (адиабатически), иапример, вглубь, будет меиее плотиым и более горячим, чем окружающие слои. Повышеииая температура элемеита приведет к усилеиию в ием эиерговыделеиия, и этот эффект будет способствовать колебательной иеустойчивостн, как следует из уравнения (18.29) (члеи, содержащий ν). Кроме того, если $d\ln X/dr > 0$, то элемент, движущийся вглубь, будет характеризоваться более высоким содержанием водорода, чем окружающие слон, что еще больше усилит разиость между геиерацией эиергии в элемеите и окружающей среде. Этот эффект также будет способствовать колебательиой иеустойчивости [см. уравиеиие (18.29)]. Такое влияиие градиеитов содержанний водорода н ^{3}He служит основиой причииой колебательиой неустойчивости, обиаружеииой в работах [87, 184].

Отметим, что если $A < 0$, но $\mathscr{S} > 0$, то члеи, учитывающий ядериые реакции (т.е. член с ν) в (18.29) оказывает противоположиое действие по сравиеиию с члеиом (содержащим K), приводящим к возникновеиию колебательиой коивекции с иарастающей амплитудой.

18.26. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ

Ниже мы ие будем предполагать, что $|\sigma|$ обязательно мало, и поэтому иам иет необходимости прииимать предположеиия (б) и (в), сформулированные в иачале разд. 18.2. Одиако поскольку мы все еще имеем дело с модами высокого порядка, то будем по-прежнему считать справедливым предположеиие (а).

Тогда уравиеиие импульса (18.7) для радиальиой составляющей смещеиия

сохранится, а уравнение неразрывности изменится [прежняя его форма — уравнение (18.10)] и будет иметь вид

$$(k_H^2/s^2)P'/\rho = -\rho'/\rho - \delta r(d\ln\rho/dr) - ik_r\delta r. \qquad (18.32)$$

Как и выше, это уравнение можно использовать для исключения P'/ρ из уравнения импульса. В результате вместо уравнения (18.11) получим

$$s^2(k_T^2/k_H^2)\delta r = (ik_r s^2/k_H^2 - g)\rho'/\rho + (s^2/k_H^2)ik_r\delta r d\ln\rho/dr. \qquad (18.33)$$

Уравнение энергии остается прежним [см. уравнение (18.14)], но теперь оно содержит дополнительный член P'/P. Если относительно величины $\delta(\varepsilon - (\nabla\cdot\mathbf{F})/\rho)$ сделать те же предположения, что и выше, то результирующее уравнение энергии установит связь между P'/P, T'/T, ρ'/ρ, X'/X и δr [см. соотношение (18.19)].

Уравнение состояния [ср. с (18.20)] с $P'/P \neq 0$ дает связь между P'/P, T'/T, ρ'/ρ и μ'/μ.

Уравнение неразрывности (18.32), как мы уже видели, дает связь между P'/P, ρ'/ρ и δr.

Наконец, уравнения (18.21а,б) — это два соотношения, связывающие μ'/μ с δr и X'/X с δr.

Четыре последних уравнения можно использовать, чтобы выразить P'/P, T'/T, μ'/μ и X'/X через ρ'/ρ и δr. Подставляя довольно громоздкое результирующее выражение в (18.33), получим уравнение пятой степени относительно s. Упростим его с помощью некоторых термодинамических тождеств и других преобразований и примем во внимание приближение коротких волн (когда длина волны возмущения много меньше всех характерных длин задачи, за исключением характерных длин изменений X или μ). После громоздких алгебраических преобразований получим:

$$\frac{1}{k_T^2}\frac{\rho}{\Gamma_1 P}s^5 - \frac{1}{k_T^2}\frac{\rho}{\Gamma_1 P}\frac{\varepsilon(\nu-1)-(KT/\rho)k_T^2}{c_V T}s^4 + s^3 + \left[\frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{\varepsilon(\lambda+1)}{c_P T} - \frac{\varepsilon(\nu-1)-(KT/\rho)k_T^2}{c_P T}\right]s^2 - \frac{k_H^2}{k_T^2}Ags -$$
$$-\frac{k_H^2}{k_T^2}g\left[\frac{\chi_\mu}{\chi_\rho}\frac{\varepsilon(\nu-1)-(KT/\rho)k_T^2}{c_P T}\frac{d\ln\mu}{dr} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{\varepsilon\alpha}{c_P T}\frac{d\ln X}{dr}\right] = 0. \qquad (18.34)$$

Адиабатический предельный случай можно получить, приравняв формально нулю величины ε и K в (18.34). Тогда коэффициенты при всех четных степенях s (включая нулевую) обратятся в нуль. Если считать $s \neq 0$, то остается квадратное уравнение относительно s^2, которое фактически такое же, как и уравнение, рассмотренное в разд. 17.12 (за исключением использованного там предположения, что квадрат частоты Брунта — Вяйсяля, $|Ag|$, много меньше каждого из членов $k_H^2\Gamma_1 P/\rho$ и $k_r^2\Gamma_1 P/\rho$). В частности, для большого $|s|$ получаем (как и в разд. 17.12):

$$s^2 \approx -k_T^2\Gamma_1 P/\rho = -(k_r^2 + k_H^2)\Gamma_1 P/\rho. \qquad (18.35)$$

Можно показать, что предположение о большом значении σ аналогично предположению об адиабатичности, как того и следует ожидать из физических соображений.

Для малого $|\sigma|$ уравнение (18.34) приводит к результатам, совпадающим с полученными в разд. 18.2а.

В случае большого $|\sigma|$ можно поступить так же, как и в разд. 18.2а, и положить $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$, где $|\Delta\sigma| \ll \sigma_0$ и где σ_0 определяется из соотношения (18.35). Пренебрегая степенями $|\Delta\sigma|$ выше первой, получаем

$$\Delta\sigma = [\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2](1 - \chi_\rho/\Gamma_1)/2c_V T + (\chi_T/\Gamma_1)\varepsilon(\lambda + 1)/2c_V T. \quad (18.36)$$

Как показывает данный результат, при отсутствии термоядерных реакций ($\varepsilon = 0$) амплитуда высокочастотного возмущения будет вследствие теплопроводности непрерывно уменьшаться со временем (что представляется вполне вероятным и свидетельствует об устойчивости). С другой стороны, всякое выделение термоядерной энергии ($\varepsilon \neq 0$) будет, как можно ожидать, оказывать обратное действие, т.е. будет способствовать увеличению амплитуды возмущения со временем (колебательная неустойчивость).

18.3. Новые исследования

В настоящем разделе мы кратко рассмотрим некоторые последние работы, посвященные расчетам линейных неадиабатических нерадиальных колебаний сферических звездных моделей.

Вероятно, первое исследование такого рода было выполнено Кристенсеном-Далсгаардом и Гафом [88] применительно к проэволюционировавшей (т.е. современной) модели Солнца. Главной целью работы было проверить результаты предыдущих квазиадиабатических расчетов вибрационной устойчивости модели Солнца относительно нерадиальных колебаний в низших модах g^+ при низких значениях l (в частности, $l = 1$). Согласно их предыдущей работе [87], эта модель оказалась колебательно неустойчивой в моде $g_1^+ (l = 1)$ благодаря градиенту содержания ^{3}He в модели (физическое объяснение эффекта см. в разд. 18.2). Неустойчивость в этой моде имеет важное значение в связи с проблемой солнечных нейтрино (см. [29, 30, 87] и ссылки в последней статье; см. также разд. 18.2).

Работа [88] показала, что почти по всему объему модели неадиабатические собственные функции практически совпадают с соответствующими адиабатическими собственными функциями. Неадиабатические эффекты оказались заметными в самых внешних слоях непосредственно под фотосферой, причем толщина слоев составила лишь около 300 км. Именно в этой области наши знания о строении Солнца являются, вероятно, наиболее неполными. Возможно, что здесь наряду с лучистым существует и конвективный перенос энергии. Авторы работы [88] пренебрегли вариациями конвективного потока (что вполне понятно). В этом тонком слое было обнаружено сильное затухание, сравнимое по величине с возбуждением в недрах. Авторы пришли к заключению, что из-за многочисленных неопределенностей в строении самых внешних слоев в настоящее время нельзя сделать уверенных выводов о коле-

бательиой иеустойчивости Солнца в нерадиальных модах g^+ ннзкого порядка.

Следующей работой в рассматриваемом направлении, вероятно, явилось очень важное нсследованне Андо и Осаки [19]. Применительно к модели солиечной оболочки онн решилн уравнения лииейиых нерадиальиых неадиабатических пульсаций в приближении Каулинга (авторы нашли, что для их задачи это приближение хорошо оправдывается). Статья содержит много иитересиых н полезиых результатов, н здесь мы упомянем лишь некоторые из них. Так, лучистый перенос рассматривался в рамках иесколько видоизмененного приближения Эддингтона, которое является более точным по сравнению с приближением лучистой теплопроводности. Приближение Эддингтоиа описывается в статье Унно [588, App]. Уино и Спигел [594] показалн, что это приближение согласуется с результатамн точиого расчета лучистого переноса как в оптически тонком, так и в оптически толстом пределах. Но конечно, в общем случае оно все же является иекоторым приближеннем.

Авторы иашли, что низшие p-моды оказались захваченными (разд. 17.10) во внешней конвективной зоне Солнца, но в фотосфере н над ней имеют характер исчезающих волн. Осиовная причииа захвата состонт в том, что в коивективиой области частота Брунта — Вяйсяля N (разд. 17.2) становится очень малой (равной нулю в случае адиабатической коивекции), а сразу над конвективиой областью возрастает, достигая довольио больших значеннй (см.[19, Fig. 1]). С другой стороны, критическая акустическая частота S_l [формула (17.89)] также меньше весьма высоких частот, интересующих авторов, даже для рассмотреиных ими довольно высоких сферических гармоинк ($10 \leqslant l \leqslant 1500$). Следовательио, часть коивективной области попадет в акустическую область A. Однако в фотосфере и иад ней угловые частоты, которые представляют интерес, оказываются, как правило, меньше N, но все еще больше S_l. Поэтому фотосфериые и несколько более высокие области являются в соответствии с аналнзом, проведеиным в разд. 17.10, областями исчезающих волн.

Интересио, что большинство захваченных p-мод оказались колебательно иеустойчивыми. Основное дестабилизирующее влияние связано с $\varkappa$-механизмом Бейкера и Киппенхана [36] (см. также гл. 9 настоящей книги), хотя небольшую роль играет механизм, изученный Муром и Спигелом [385]. Оказалось, что приближение лучистой теплопроводностн приводит к большей иеустойчивости, чем приближенне Эддингтоиа, и авторы [385] указали причины такого различия. Большая часть энергии пульсаций в этих низких p-модах скоицеитрнрована в тоиком слое (толщиной примерно 1000 км) сразу под фотосферой. Однако из-за быстрого падения плотностей с высотой в равновесной модели энергия пульсаций непосредственно иад фотосферой быстро падает до нуля.

Вероятно, иаиболее ннтересный результат состонт в том, что самые неустойчивые из захваченных p-мод располагаются иа диаграмме «угловая частота σ — горизоитальное волновое число k_H» в длииной вытянутой области (похожей на горный хребет на географической карте), локализованной при частоте, приблизительно соответствующей периоду 300 с, в широком диапазо-

не горизонтальных длин волн, скажем от ~ 1000 км до немного более 300 000 км. Приведенные числа согласуются с параметрами пятиминутных осцилляций, открытых Лейтоном и др. [347] и позднее описанных, например, в работах [172, 223, 391]. Последующие наблюдения (см. [450] и ссылки в этой работе), по-видимому, окончательно подтверждают интерпретацию пятиминутных пульсаций как p-мод нерадиальных колебаний. Другие модели пятиминутных пульсаций Солнца можно найти в обзоре [544]. См. также некоторые ссылки в [19].

В исследовании Андо и Осаки [19] пренебрегалось взаимодействием конвекции и пульсаций, и это вполне понятно, поскольку надежная теория неустановившейся конвекции отсутствует. Авторы признают, что такое взаимодействие может оказаться важным и может изменить их результаты. Они также подчеркивают чувствительность результатов к использованной модели солнечной оболочки. Как отмечают авторы, существенную роль могут играть и потери энергии в форме бегущих волн, распространяющихся в хромосферу и корону, что в их модели не рассматривалось.

В своей следующей работе Андо и Осаки [20] приняли во внимание эту возможную утечку энергии посредством бегущих волн. Были получены по существу те же выводы, что и ранее. Другими словами, очевидно, что указанные потери энергии не очень существенны, по крайней мере если говорить об их влиянии на результаты анализа устойчивости. В частности, эти потери невелики для горизонтальных длинных волн и вообще отсутствуют для горизонтальных коротких волн, поскольку короткие волны не распространяются в корону.

В дальнейшем Андо [18] использовал методы, развитые в [19], для изучения возможности возбуждения акустических нерадиальных колебаний с большими l (от 10 до 1500) в звездах поздних спектральных классов в широкой области на диаграмме Герцшпрунга — Рессела. Он нашел, что захват волн, подобный происходящему в водородной конвективной зоне Солнца (см. выше), — довольно распространенное явление, особенно в звездах, достаточно холодных для того, чтобы иметь хорошо развитую водородную конвективную зону. Он нашел также, что эти захваченные акустические моды, как правило, колебательно неустойчивы и неустойчивость обусловлена в основном действием $\varkappa$-механизма Бейкера и Киппенхана [36] (см. гл. 9). Для звезд, несколько более холодных, чем в полосе неустойчивости цефеид (см. рис. 3.1), темп нарастания амплитуды η (относительное увеличение амплитуды за период) в максимально неустойчивых модах при изученных значениях l описывается приближенной интерполяционной формулой $\eta \propto g^{-0,5} T_e^6$, где g — ускорение силы тяжести на поверхности звезды, а T_e — эффективная температура. Андо высказал предположение, что возникающая хромосферная активность может объяснить эффект Уилсона — Баппу [623]. (Однако эти общие идеи в отношении эффекта Уилсона — Баппу, по-видимому, не согласуются с результатами работы [24].)

Расчеты Сибахаси и Осаки [508, 509] не были неадиабатическими (анализ устойчивости проводился в квазиадиабатическом приближении), но их результаты, по мнению автора настоящей книги, достаточно важны и заслужи-

вают хотя бы краткого упоминания. В [508] былн изучены нерадиальные колебания при больших l для звезд с массамн 15 и 30 $M_\odot$, имеющих полукоивективиые зоиы. Один нз очень интересных результатов этой работы состоит в том, что при больших l ($l \gtrsim 8$) иерадиальиые колебаиия таких звезд попадают в одии из двух весьма различных классов: либо преимуществеиио g-моды, захваченные в областн с граднеитом μ на границе конвективиого ядра, либо пренмущественно p-моды, захваченные в звездной оболочке. С ростом l такое разделеине иа два класса становится все более четким. (Дальиейшее рассмотреиие зтого эффекта можно найтн в [507, 593].)

При анализе устойчивости авторы нашли, что g-моды с большими l (≈ 15), которые былн захвачены в полукоивективиой зоие с перемеииым зиачеием μ, оказались колебательио неустойчивыми. Эта иеустойчивость физнчески соответствует колебательиой коивекции с иарастающей амплитудой, обиаружеииой ранее Като [293] иа осиове локальиого аиализа и рассмотреииой в разд. 18.2. Получеииый результат можио считать ответом иа критику результатов Като [293] в работах [22, 228], в которых подчеркнвался локальиый характер анализа Като. Захват колебаний в области с градиеитом μ озиачает, что амплнтуды нерадиальиых g-мод велики как раз в тех областях, где они и должиы быть отиосительио большими для того, чтобы действовал механизм Като. Одиако, как отметилн авторы, подобиая колебательиая иеустойчивость, вероятно, не нмеет инчего общего (по крайией мере иепосредствеино) с неустойчивостью звезд тнпа β Цефея (гл. 3) в осиовиом потому, что последияя связана, по-видимому, с малыми l (≈ 2 или даже 0). Кроме того, в статье представлеиа иовая схема классификацин мод, осиоваииая иа вышеупомяиутом раздвоеиии колебаний иа g-моды, захвачеииые в ядре, и p-моды, захвачеииые в оболочке. Эта схема более ясио отражает физическую природу иерадиальиых колебаиий звезды (см. также [626]).

В своей второй работе Сибахаси и Осакн [509] исследовали иеустойчивость массивных звезд (с массами 5, 11, 20 и 40 $M_\odot$) относительио нераднальиых колебаиий в g-модах, захвачеииых в области с градиеитом μ (см. выше). В зтой областн пронсходит слоевое термоядерное гореиие водорода, которое служит причииой любой возможиой колебательиой иеустойчивости. Лишь иекоторые нз моделей оказались неустойчивыми: модель $20 M_\odot$ для значения $l = 10$ и модель $40 M_\odot$ для иескольких l (от 11 до 40). Кроме того, времена иарастаиия колебаиий в иеустойчивых модах оказались отиосительио большими, порядка характериых времеи эволюции, н все неустойчнвые моды стали устойчивымн к тому времеии, когда звезды превратились в красиые гигаиты. Общий вывод таков, что иесколько обнаружеииых случаев колебательиой иеустойчивости, обусловлеииой слоевым гореиием водорода, вероятно, не имеют непосредствениого отиошения к иаблюдаемым пульсациям звезд типа β Цефея (гл. 3).

Причнны, по которым изучеииые моделн часто оказывались устойчивыми, весьма иитересиы,н оии довольио подробио освещеиы в [509], однако изза недостатка места мы ие можем больше остаиавлнваться на зтнх результатах.

В последнее время появился ряд расчетов иерадиальиых иеадиабатнческих

колебаний звезд различных типов (главным образом расчеты Осаки и Дземборского). В частности, Осаки [409] исследовал вибрационную устойчивость относительно нерадиальных колебаний для моделей цефеид. Один из наиболее интересных результатов Осаки [409] явился в конечном счете следствием того, что в моделях звезд с высокой концентрацией вещества к центру (полагают, что таковы цефеиды) нерадиальные колебания с типичными для цефеид частотами обладают во внутренних областях свойствами g-мод. Причины такого двойственного поведения нерадиальных колебаний в моделях с высокой концентрацией вещества к центру были указаны в разд. 17.10. Гравитационный характер таких мод был также отмечен и объяснен Дземборским [187], показавшим, что в этих очень плотных центральных областях нерадиальные колебания (по существу, g-моды) имеют очень малые вертикальные длины волн и свыше тысячи узлов. Как следствие, для этих волн даже в глубоких звездных недрах очень большую роль играют неадиабатические эффекты. Дземборски [187] оценил неадиабатические эффекты с помощью квазиадиабатического приближения, и они оказались настолько большими, что характерные времена затухания этих внутренних волн получились лишь в несколько раз больше периодов пульсаций для типичной звезды-гиганта. Это привело автора к заключению, что в звездах типа цефеид нерадиальные колебания либо не возбуждаются, либо их возбуждение является очень слабым. В последующей работе Дземборски [188], основываясь на аналогичных рассуждениях, пришел к такому же выводу в отношении моделей звезд горизонтальной ветви, которые могут представлять модели звезд типа RR Лиры.

Осаки [409] знал о таких малых временах затухания и установил, что такие коротковолновые g-моды распространяются очень медленно (скорость распространения пропорциональна квадрату длины волны; разд. 17.12). Поэтому он заключил, что из-за неадиабатических эффектов эти короткие волны должны затухать задолго до того, как они достигнут звездного центра и затем отразяться обратно, образуя стоячие волны. Таким образом, по мнению Осаки, нерадиальные колебания моделей звезд-гигантов не могут иметь характера обычных стоячих волн. Волны, бегущие в направлении центра звезды сильно поглощаются: центральные области образуют своего рода «сток» для нерадиальных колебаний. В связи с этим Осаки переформулировал внутреннее граничное условие, чтобы согласовать его с потерями энергии пульсаций в форме волн, бегущих в направлении центра.

Учет эффектов бегущих волн в центральных областях посредством внутреннего граничного условия позволил рассмотреть звездную оболочку как практически изолированную пульсирующую область для p-мод, эффективно захваченных в пределах оболочки (Осаки [409] назвал их модами $\bar{p}$); точно так же можно рассматривать чисто радиальные пульсации моделей звезд-гигантов (п. 9.2б).

Осаки [409] нашел, что из-за оттока энергии пульсаций в звездные недра нерадиальные колебания при малых l оказываются устойчивыми. Однако при больших l ($l \geqslant 6$ для моды $\bar{f}_1$ и $l \geqslant 4$ для моды $\bar{p}_1$ в обозначениях Осаки) колебания оказались неустойчивыми в результате раскачивающего влияния зон ионизации водорода и гелия (гл. 10). Темп нарастания амплитуды

для этих неустойчивых нерадиальных мод $\bar{p_1}$ с большими l получился того же порядка, что и в случае чисто радиальных колебаний аналогичных моделей.

Несмотря на то что такие нерадиальные колебания оказались в проведенном линейном анализе [409] неустойчивыми, они обычно в цефендах не наблюдаются. По мнению Осаки, это может быть связано с тем, что нелинейные эффекты по какой-то причине благоприятствуют радиальным модам. Он также высказал предположение, что неустойчивые нерадиальные моды высокого порядка могут объяснить «микротурбулентность» или «макротурбулентность», проявляющуюся в спектрах гигантов и сверхгигантов, как раньше принимал Люси [354] для α Лебедя, а еще раньше Серковски [504] для U Единорога (переменная типа RV Тельца) и Шол [506] для o Кита (Мира Кита) (см. также [501]). Малые колебания в течение коротких промежутков времени (порядка месяцев) наблюдались почти у всех сверхгигантов [1, 212, 357, 464].

В важной работе Дзембовского [190] очень основательно и подробно рассмотрена вся проблема линейных неадиабатических колебаний, как радиальных, так и нерадиальных, для звезд различных типов, включая гиганты и сверхгиганты.

Чтобы рассмотреть квазиадиабатический случай точнее, чем прежде, Дзембовски получил асимптотические решения линеаризованного уравнения энергии с учетом лучистой теплопроводности, справедливые для радиальных и нерадиальных мод в глубоких звездных недрах. Нахождение асимптотических решений было основано на методах, разработанных советскими математиками (см., например, [213]). С помощью этих решений Дзембовски нашел, что во многих случаях обычный квазиадиабатический анализ может привести к совершенно ошибочным результатам в отношении нерадиальных колебаний в глубоких звездных недрах, даже несмотря на то что неадиабатические эффекты там могут быть очень малыми. В частности, амплитуды g-мод высокого порядка, захваченных в глубоких недрах моделей звезд-гигантов с высокой концентрацией вещества к центру, могут оказаться значительно меньше, чем предсказывается обычной квазиадиабатической теорией. Дзембовски отметил, что эти очень малые амплитуды захваченных g-мод высокого порядка можно объяснить с помощью бегущих волн, уходящих в звездные недра, в согласии с результатом Осаки [409]. Оба автора независимо пришли к одинаковому виду внутреннего граничного условия, учитывающего эти эффекты.

Дзембовски [190] рассмотрел также g-моды высокого порядка, захваченные в области с градиентом μ в недрах проэволюционировавших моделей и пришел по существу к тем же самым выводам, что Сибахаси и Осаки [508] (см. выше в данном разделе), а именно, что такие волны имеют в указанной области довольно большие амплитуды (колебательная конвекция с нарастающей амплитудой, обнаруженная Като).

Дзембовски [190] пришел к общему выводу, что нерадиальные колебания в оболочках некоторых типов звезд могут возбуждаться посредством тех же ионизационных механизмов, которые, как считают, ответственны за пульса-

цин цефеид, переменных типа RR Лиры и других звезд (гл. 10), и могут иметь приблизительио такой же темп иарастания амплитуды, как и в случае радиальных колебаний. В частности, он нашел, что в оболочках моделей звезд горизоитальиой ветви, которые могут представлять модели перемеиных типа RR Лиры, моды p_1 прн малых значениях l устойчивы. Однако при больших зиачеииях l ($\approx 6 - 7$) моды p_1 оказались неустойчивыми приблизительно с такими же инкрементами нарастання амплитуды, как для радиальиых мод. Этот результат напоминает результат Осаки [409] для модели звезды-гиганта, которая может представлять модель цефеиды. Дзембовски [190] обиаружил также неустойчивость нерадиальных мод f при больших зиачеииях l(от ~ 100 до 200) для моделей с гораздо более высокими эффективными температурами (вплоть до $\sim 10\,000$ К), чем для перемеиных типа RR Лиры в полосе неустойчивости иа диаграмме Герцшпрунга — Рессела.

Кроме того, Дзембовски [190] исследовал модель сверхгиганта, предлагаемую для описания звезды α Лебедя, и иашел, что эта модель колебательно неустойчива только прн высоких значениях l в согласии с предыдущими результатами Люси [354]. Однако он нашел, что в более холодном сверхгиганте, лежащем вблизи полосы иеустойчивости цефеид на диаграмме Герцшпрунга — Рессела, возбуждаются моды с более низкими значениями l.

В этой же работе Дзембовски исследовал и устойчивость моделей звезд типа δ Щита относительно радиальиых и иерадиальиых колебаний (см. обзоры [52, 219], посвящеииые этим звездам). Как и раньше (см. [188]), он иашел, что указанные модели колебательно неустойчивы во миогих модах, как радиальных , так и иерадиальных, и все такие моды имеют сравнимые инкременты роста амплитуды. Автор высказал предположение, что эти многочисленные возбуждеииые моды вполне могут взаимодействовать между собой. Такое взаимодействие может объяснить (по крайией мере частично) сложное наблюдаемое поведение миогих подобных объектов (см. гл. 3 и [52]).

В работе [191] Дзембовски рассчитал вариации блеска звезды при иерадиальных колебаниях.

С помощью полиостью иеадиабатического иерадиальиого анализа Дзембовски [189] исследовал устойчивость моделей белых карликов относительно радиальиых и иерадиальных колебаний. Целью работы являлось теоретическое изучение перемеиных белых карликов класса DA (или звезд типа ZZ Кита), свойства которых были суммированы в работах [363, 365, 392, 604] (гл. 3). Исходя из более раниего результата Воклера [607], Мак-Гро и Робинсон [365] высказали предположеиие, что осиовиая причииа перемеииости, как и для обычиых цефеид, связаиа со второй иоиизацией гелия в оболочке (см. гл. 10) (см., однако, [147]).

Модели, использованные Дзембовским [189] для проверки указанного предположеиия, имеют оболочки, богатые водородом и гелием. Одиако эти оболочки слишком холодны для термоядериого «гореиия» водорода и гелия. Основной результат расчетов состоит в том, что хотя зоиа второй иоиизации гелия всегда создает заметный дестабилизирующий эффект, тем не менее радиальные, а также все иерадиальиые моды относительио иизкого порядка и с малыми значениями l оказываются устойчивыми. Сюда попадают и те

g-моды с низкими l (1 или 2) и относительно низкого порядка (приблизительно ≤ 20 — 25), периоды которых соответствуют наблюдаемым периодам белых карликов класса DA; моды f и p имеют слишком короткие периоды. С другой стороны, нерадиальные g-моды порядка ~ 10 — 20 и при больших l (сотни и тысячи) оказались очень неустойчивыми с временами нарастания амплитуды порядка нескольких суток. Моды f при больших l, а в некоторых случаях и моды p, также оказались колебательно неустойчивыми. Дзембовски пришел к выводу, что переменные белые карлики класса DA, возможно, образуют продолжение полосы неустойчивости цефеид к звездам с самыми высокими известными эффективными температурами и ускорениями силы тяжести на поверхности (исключая, вероятно, нейтронные звезды, которые мы здесь не рассматриваем).

Однако самовозбуждающиеся моды имеют слишком короткие периоды по сравнению с наблюдаемыми у таких звезд. (Как было установлено в разд. 17.12, при больших l периоды g-мод почти не зависят от l, за исключением случая однородной модели. Однако при уменьшении l периоды g-мод обычно увеличиваются; см., например, [53, 603].) Поэтому Дзембовски [189] высказал предположение, что устойчивые моды с низкими l, имеющие периоды в наблюдаемом диапазоне, возбуждаются посредством нелинейного взаимодействия с неустойчивыми короткопериодическими модами с большими l. Он представил несколько доводов в пользу такой точки зрения и призвал к разработке теории взаимодействия мод для нерадиальных колебаний (некоторые соображения о взаимодействии радиальных мод можно найти в [345, § 86 — 88]). Теория переменных белых карликов обсуждается в очень интересной и обстоятельной работе ван Хорна [604].

В последующих расчетах Дзембовски [192] нашел, что g-моды с низкими l, периоды которых соответствуют наблюдениям, в действительности могут возбуждаться посредством механизма скачка непрозрачности, предложенного Стеллингверфом (см. разд. 10.1 и 13.1).

Сенкевич и Дзембовски [511] исследовали вибрационную устойчивость аккрецирующих белых карликов в тесных двойных системах. Авторы нашли, что при высоком темпе аккреции все моды, как радиальные, так и нерадиальные, оказываются неустойчивыми. Во всех случаях причиной неустойчивости является термоядерное возбуждение в водородном или гелиевом слоевом источнике, расположенном вблизи поверхности звезды. Инкременты нарастания амплитуды для g-мод на три порядка больше, чем для радиальных, f- или p-мод. [Причиной такого сильного возбуждения g-мод служит то, что в белых карликах g-моды имеют заметные амплитуды только во внешних слоях, см. [53]. Почти по всему объему белого карлика частота Брунта — Вяйсяля $N = (-Ag)^{1/2}$ (разд. 17.2) близка к нулю, тогда как критическая акустическая частота S_l (разд. 17.10) довольно высока. Для интересующих нас собственных частот g-мод мы почти по всему объему белого карлика имеем $N < \sigma < S_l$. Поэтому, согласно разд. 17.10, почти вся внутренняя область белого карлика при рассмотрении g-мод оказывается в области исчезающих волн.] Неустойчивые g-моды имеют характерные времена нарастания амплитуды порядка месяцев, а периоды колебаний составляют 10 — 50 с. Тем не

менее авторы не делают предположений о том, что неустойчивость g-мод аккрецирующих белых карликов объясняет осцилляции, наблюдаемые при вспышках карликовых новых (гл. 3).

Сайо и Кокс [475] провели расчеты линейных нерадиальных неадиабатических колебаний моделей массивных звезд главной последовательности, а также несколько сильнее проэволюционировавших массивных звезд. Неадиабатические периоды получились почти точно такими же, как и в адиабатическом случае. Кроме того, почти по всей модели звезды неадиабатические собственные функции практически совпали с адиабатическими. Основной целью работы являлась проверка эффективности механизма скачка непрозрачности Стеллингверфа (разд. 10.1 и 13.1) для возбуждения нерадиальных колебаний.

ГЛАВА 19

СМЕШАННЫЕ ВОПРОСЫ

В настоящей главе мы кратко рассмотрим ряд эффектов, которые появляются, если отбросить некоторые из многочисленных упрощающих предположений, принимавшихся почти во всех предыдущих главах. Многие из этих эффектов до сих пор еще не полностью изучены, и некоторые из них активно исследуются в настоящее время. Поэтому изложение различных вопросов будет в большинстве случаев довольно кратким и, вероятно, поверхностным; данную главу в отличие от остальных следует в значительной степени рассматривать лишь как указатель литературы.

Например, до сих пор не изучено влияние вязкости (молекулярной или любого другого вида, например, лучистой) на колебания звезд в самом общем случае; оно было довольно подробно рассмотрено только для чисто радиальных колебаний (см., например [146, ch.27 и ссылки в ней; 345, § 47, 49, 71]). Некоторые шаги в связи с исследованием колебаний частично кристаллизовавшихся белых карликов были предприняты ван Хорном и Саведовым [605], а новый и весьма тщательный анализ колебательных свойств таких систем проведен Хансеном и ван Хорном [258].

Пожалуй, наиболее обширные исследования были посвящены влиянию вращения на колебания звезд, и эти вопросы рассматриваются в разд. 19.1. Эффекты крупномасштабных магнитных полей являются качественно иными и изучены менее подробно; они рассматриваются в разд. 19.2. В разд. 19.3 кратко обсуждается очень трудная, важная и все еще нерешенная проблема взаимодействия звездных пульсаций и конвекции. В последние годы был проведен довольно исчерпывающий анализ влияния нарушения теплового баланса на звездные пульсации, и эти эффекты рассматриваются в разд. 19.4.

Эффекты общей теории относительности были весьма подробно изучены в линейном адиабатическом приближении, их обсуждение, а также соответствующие библиографические ссылки представлены в разд. 19.5. Там же обсуждаются и цитируются работы, в которых одновременно учитывались как эффекты вращения, так и эффекты общей теории относительности. Если специально не оговорено, то в данной главе мы всегда будем действовать в рамках нерелятивистского приближения.

Вопросы вековой устойчивостн — зто частный случай теорнн пульсаций; онн кратко рассматрнваются в разд. 19.6.

Наконец, в разд. 19.7 мы попытаемся оценнть общее место н значение теорнн пульсаций в изученнн звезд н звездной зволюцнн.

19.1. Влияние вращения

19.1a. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Аналнз звездных пульсаций прн учете вращення очень труден. Вращенне нзменяет н снльно усложняет строенне даже невозмущенной (непульснрующей) звезды, и эти многочисленные трудности рассмотрены, например, в обзорных статьях [227, 329, 370, 413, 469, 560, 602] (см. также [35; 500, §21; 612; 632, p.38] и статьи в сборнике [522]). Недавно вышла в свет прекрасная монография Тассуля [565], в которой рассматрнваются все аспекты вращення звезд. Твердотельное вращенне несжнмаемого сферонда было нзучено еще в 1889 г. [56, 352]. Прнмером возннкающих прн учете вращення усложненнй, как впервые показано в [612] (см. также [35]), служнт то, что звезда, деформнрованная вращеннем, в общем случае не может находнться в тепловом равновеснн. Такне отклонення от теплового равновесня обычно прнводят к возннкновенню медленных «мерндноналъных теченнй», скорость которых обычно порядка пронзведення велнчнны R/t_K на отношенне центробежного н гравнтацнонного ускореннй, где R — раднус звезды, а t_K — характерное время Кельвнна — Гельмгольца (гл. 2) [403, 563]. Мерндноналъные течення порождают ряд проблем, которые былн обсуждены, напрнмер, в [404, 406]. Кроме того, существуют ограннчення на распределенне угловой скоростн вращення внутрн звезды. Напрнмер, согласно [226, 237] (см. также [286]), момент количества двнження на еднннцу массы в звезде не может уменьшаться в направленнн наружу.

Общее нсследованне вращающихся жидкостей связано с решеннем сложных задач, н нм посвящена обширная лнтература (см., напрнмер, кннгн Чандрасекара [72], Гринспзна [249], Бэтчелора [42, гл. 7]).

Можно отметнть, что в случае звезд большннство усложняющих эффектов возннкает в конечном счете нз-за несфернчностн звезды, а несфернчность в свою очередь обусловлена центробежной снлой на еднннцу массы, $\tilde{\omega}\Omega^2$, где $\tilde{\omega}$ — расстоянне от осн вращення, а Ω — угловая скорость вращення *. Поскольку центробежная сила пропорциональна Ω^2, прн достаточно медленном вращенни звезды эту силу н вызываемую ею несфернчность можно счнтать пренебрежнмо малымн.

На элемент массы в пульснрующей н вращающейся звезде прн ее колебаниях действуют наряду с обычными еще две снлы: *центробежная сила* и *сила Кориолиса.* Как указано выше, первая нз ннх пропорцнональна Ω^2, тогда как вторая пропорцнональна лншь Ω. Поэтому снлу Корнолнса необходнмо учн-

* В этом и последующих разделах для обозначения угловой скорости используется символ Ω. Не путайте с обозначением безразмерной частоты пульсаций, использовавшимся в предыдущих главах (особенно в гл. 8 и 17)!

тывать, даже-если звезда вращается настолько медленно, что можно пренебречь центробежной силой. Из-за наличия двух этих сил неудивительно, что в звезде, которая одновременно вращается и пульсирует, могут возникать совершенно новые явления. Например, как показали Папалоизу и Прингл [418], становятся важными крутильные колебания (разд. 17.3), приводящие к образованию волн типа волн Россби с отличными от нуля частотами. Если вращение настолько медленное, что можно пренебречь отклонениями от сферичности, то угловая частота таких мод равна $2m\Omega/l(l + 1)$, где l и m — соответственно степень и порядок сферических гармоник. Папалоизу и Прингл назвали этот новый вид колебаний r-модами.

Очевидно, что в звезде с произвольно быстрым вращением не могут существовать чисто радиальные колебания. Тем не менее если звезда вращается не слишком быстро, то при ее колебаниях лагранжевы смещения элементов массы могут оказаться преимущественно радиальными с относительно малыми тангенциальными составляющими (этот вывод с очевидностью следует из уравнения (82.12) в [345] или из уравнения (52) в [356]). Такие колебания называют квазирадиальными,и в пределе исчезающе малой скорости вращения они становятся чисто радиальными.

Почти во всех работах о влиянии вращения на звездные пульсации предполагалось, что колебания являются адиабатическими, причем лагранжевы вариации давления и температуры определяются соотношениями (5.36). Если специально не оговорено, то в оставшейся части данного раздела мы также будем использовать это предположение. Оказывается, что вращение (по крайней мере если оно лишь слегка искажает форму звезды) всегда оказывает стабилизирующее влияние на квазирадиальные колебания в том смысле, что для таких колебаний критическое значение показателя адиабаты Γ_1, ниже которого звезда является динамически неустойчивой (гл. 8), становится меньше 4/3 (см., например, [78; 113; 133; 136; 332; 345, §82], а также ссылки в [136]). Как показано в [330], этот стабилизирующий эффект имеет место не только при твердотельном вращении, но и для любого вида дифференциального вращения, по крайней мере если $\Gamma_1 = \text{const}$. Дальнейшее рассмотрение динамической устойчивости вращающихся звезд выполнено, например, в [45].

19.16. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗВЕЗДЫ

В гл. 15 уже отмечалось, что для вращающейся звезды собственные функции и собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения по-прежнему подчиняются вариационному принципу, но его нужно несколько модифицировать. Здесь мы рассмотрим данный вариационный принцип, следуя в основном превосходному анализу Линден-Белла и Острайкера [356]. Как мы увидим, наиболее существенная часть модификации состоит в том, что для применимости вариационного принципа собственная частота ω должна быть чисто вещественной. Первым, кто показал, что собственные функции и собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения в случае однородно вращающейся звезды действительно подчиняются некоторому вариационному принципу, был Клемент [100], но он не уточнил, что этот принцип применим только к вещественному ω.

Выше (разд. 15.2) мы уже видели, что для невращающейся звезды собственные частоты ω являются либо чисто вещественными, либо чисто мнимыми. Однако для вращающейся звезды частота ω может оказаться комплексной (см. ниже). Поэтому во вращающейся звезде может, например, возникнуть такое довольно необычное явление, как колебательная конвекция с нарастающей амплитудой (см. ниже, а также [345, §82]).

Рассмотрим линеаризованное уравнение движения в общем виде (15.18). Далее, запишем .

$$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \equiv \partial/\partial t + M, \tag{19.1}$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость жидкости в невозмущенном (неосциллирующем) состоянии, а второе равенство служит определением оператора M. Если течения установившиеся, то $\partial \mathbf{v}_0/\partial t = 0$, и операторы $\partial/\partial t$ и M коммутативны. Если принять также что $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) \exp[i\omega t]$, где $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}, t) \equiv \delta\mathbf{r}$ — лагранжево смещение элемента массы, то линейное адиабатическое волновое уравнение принимает следующий вид:

$$-\omega^2\boldsymbol{\xi} + 2i\omega M\boldsymbol{\xi} + M^2\boldsymbol{\xi} = -\mathscr{P}(\boldsymbol{\xi}) - \mathscr{V}(\boldsymbol{\xi}), \tag{19.2}$$

где операторы $\vec{\mathscr{P}}$ и $\vec{\mathscr{V}}$ были определены в разд. 15.3.

По аналогии с [356] это уравнение можно записать как

$$-\omega^2\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) + \omega\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = 0, \tag{19.3}$$

где операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ определяются соотношениями

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{\xi}, \tag{19.4а}$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \equiv 2iM\boldsymbol{\xi}, \tag{19.4б}$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) \equiv M^2\boldsymbol{\xi} + \vec{\mathscr{P}}(\boldsymbol{\xi}) + \vec{\mathscr{V}}(\boldsymbol{\xi}), \tag{19.4в}$$

Умножая (19.3) скалярно на $\boldsymbol{\xi}^*\rho d\tau$ ($d\tau$ — элемент объема, а звездочка обозначает комплексно сопряженную величину) и интегрируя по всему объему V конфигурации, имеем

$$-a\omega^2 + b\omega + c = 0, \tag{19.5}$$

где

$$a = \int_V \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})\rho d\tau = \int_V \boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{\xi}\rho d\tau, \tag{19.6}$$

и т.п. [Отметим, что a — это осцилляторный момент инерции, обозначенный в гл. 8 и 16 символом J; см. также уравнение (15.6).]

Как показано в [356], операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются самосопряженными в смысле соотношения (15.11). Отсюда следует, что все числа a, b и c вещественные.

Рассмотрим теперь $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ как произвольную, достаточно регулярную векторную функцию от $\mathbf{r}$ [т.е. не обязательно как решение линейного адиабатического волнового уравнения (19.3)], а ω — просто как решение квадратного уравнения (19.5) (т.е. не обязательно как собственную частоту линейного адиабатического волнового уравнения) (в разд. 15.2 соответствующие величины

обозначались как $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и Σ). Представим теперь, что функция $\xi(\mathbf{r})$ испытывает в каждой точке $\mathbf{r}$ малое изменение $\Delta\xi$, причем величина $\mathbf{r}$ и все невозмущенные величины остаются в течение этого изменения постоянными. Тогда, варьируя уравнение (19.5), мы получим выражение, содержащее $\Delta\xi$, $\Delta\xi^*$, $\Delta\mathbf{A}(\xi)$, $\Delta\mathbf{B}(\xi)$, $\Delta\mathbf{C}(\xi)$ и $\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — соответствующее изменение величины ω. Однако из линейности операторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ следует, что $\Delta\mathbf{A}(\xi) = \mathbf{A}(\Delta\xi)$, и т.д. Кроме того, вследствие самосопряженности этих операторов ξ^* и $\Delta\xi$ в упомянутом выражении коммутативны. Отметим наконец, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ чисто вещественные, а оператор $\mathbf{B}$ чисто мнимый. Конечный результат можно записать в виде

$$(-2a\omega + b)\Delta\omega + \int_V (\Delta\xi^*)\cdot\{-\omega^2\mathbf{A}(\xi) + \omega\mathbf{B}(\xi) + \mathbf{C}(\xi)\}\rho d\tau +$$
$$+ \int_V (\Delta\xi)\cdot\{-\omega^2\mathbf{A}(\xi^*) - \omega\mathbf{B}(\xi^*) + \mathbf{C}(\xi^*)\}\rho d\tau = 0. \qquad (19.7)$$

Теперь если ξ — решение линейного адиабатического волнового уравнения (19.3), то первый интеграл в (19.7) обращается в нуль. Однако ξ^* в общем случае не является решением уравнения

$$-\omega^2\mathbf{A}(\xi^*) - \omega\mathbf{B}(\xi^*) + \mathbf{C}(\xi^*) = 0, \qquad (19.8)$$

а представляет собой решение комплексно сопряженной формы уравнения (19.3). Отсюда следует, что в общем случае ω не подчиняется вариационному принципу.

Однако если ω вещественно, то уравнение (19.8) и комплексно сопряженная форма уравнения (19.3) совпадают, а тогда величина в фигурных скобках во втором интеграле в (19.7) также обращается в нуль, и мы имеем $\Delta\omega = 0$, т.е. ω в данном случае подчиняется вариационному принципу.

Итак, мы доказали следующее: если величина ω вещественна, то для звезды с внутренними установившимися движениями определяемое уравнением (19.5) значение ω имеет экстремум относительно произвольных малых вариаций функции $\xi(\mathbf{r})$ в том случае, если $\xi(\mathbf{r})$ — одна из собственных функций $\xi_k(\mathbf{r})$ линейного адиабатического волнового уравнения (19.3), при этом экстремальное значение ω совпадает с адиабатической собственной частотой ω_k для k-й моды.

Отметим, что некоторые выводы разд. 15.2 можно рассматривать как частный результат проведенного анализа.

Как показал Шутц [495], с помощью небольшой модификации подхода Линден-Белла и Острайкера [356] (на котором были основаны наши рассуждения) можно получить вариационный принцип, который оказывается применимым как для вещественных, так и для комплексных собственных значений.

Решение квадратного уравнения (19.5) имеет вид

$$\omega = b/2a \pm (b^2/4a^2 + c/a)^{1/2}. \qquad (19.9)$$

Из самого определения величины a видно, что она является положительной, тогда как b и c не обязательно положительны, хотя всегда вещественны. От-

рицательиое c сответствует дииамической неустойчивости невращающейся звезды ($b = 0$) (разд. 15.2). С другой стороиы, в случае вращающейся звезды отрицательиое c может подразумевать комплексное зиачеиие ω. В свою очередь комплексиое зиачеиие ω проявится как колебательиая коивекция с иарастающей амплитудой; физическая картииа этого явлеиия рассматривается в п. 19.1в. Отметим, что выражеиие (19.9) в иекоторой степеии отражает стабилизирующее влияиие вращения: видио, что величииа c должиа иметь достаточио большое отрицательное зиачеиие, чтобы частота ω оказалась комплексиой; а в отсутствие вращеиия при любом отрицательиом значении c звезда будет дииамически иеустойчивой.

19.1в. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЧАСТОТ НЕРАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВСЛЕДСТВИЕ ВРАЩЕНИЯ

В гл. 17 н 18 мы указывалн, что порядок сферических гармоиик m ие входит ии в одно из уравнеиий линейиых нерадиальных адиабатических или иеадиабатических колебаний статнческих сферических звезд. Поэтому собствеииые частоты иерадиальных колебаний таких звезд $(2l + 1)$-кратио вырождеиы для каждой моды (разд. 17.3). Одиако во вращающейся звезде это вырождеиие полиостью снимается: для заданиого зиачеиия l собствеииая частота расщепляется иа $(2l + 1)$ подуровней, соответствующих $m = -l, -(l - 1), \ldots, (l - 1), l$. При медлеииом вращении это расщеплеиие симметричио отиосительно частоты, соответствующей $m = 0$, которая совпадает с частотой в отсутствие вращения; с увеличеиием скорости вращеиия звезды разиость частот между соседиими подуровиями возрастает. (Такое расщепление совершеиио аналогично эффекту Зеемана в атомиой физике.)

В последующем нзложеиии мы вериемся к иашим прежиим обозиачеииям (гл. 8) н будем пнсать J вместо a [см. уравиеиие (19.6)]: $J \equiv a$. Кроме того, мы будем рассматривать лишь члеиы первого порядка отиосительио угловой скоростн вращеиия Ω. Если бы мы сохраияли члеиы, пропорциоиальиые Ω^2, то соответствующие иитегралы следовало бы брать по конфнгурацин, деформированной вращением (см., например, [521, 527]). Записывая

$$\omega = \sigma_0 + \sigma', \tag{19.10}$$

где σ_0 — угловая частота колебаний иевращающегося объекта, а σ' — поправка иа эффект вращеиия, имеем из уравиеиий (19.9) и (19.6)

$$\sigma' = b/2a + O(\Omega^2) = (i/J) \int\limits_V \xi^* \cdot (M\xi)\rho\, d\tau + O(\Omega^2), \tag{19.11}$$

где оператор M определеи согласио (19.1), а $O(\Omega^2)$ означает «члеиы порядка Ω^2».

Введем систему цилиидрических коордииат $(\tilde{\omega}, \phi, z)$ и запишем

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_M + v_\phi \mathbf{e}_\phi, \tag{19.12}$$

где $\mathbf{v}_M$ — скорость в мерндноиальиой плоскости:

$$\mathbf{v}_M = v_{\tilde{\omega}} \mathbf{e}_{\tilde{\omega}} + v_z \mathbf{e}_z, \tag{19.13}$$

причем $v_{\tilde{\omega}}$, v_ϕ и v_z — соответствующие составляющие вектора $\mathbf{v}_0$;

$v_\phi \mathbf{e}_\phi$ — скорость в направлении ϕ, а $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы вдоль соответствующих осей. Если движение в направлении ϕ вызвано вращением, то

$$v_\phi = \tilde{\omega}\Omega, \tag{19.14}$$

где ось вращения параллельна оси z. Если учесть, что единичные базисные векторы могут при дифференцировании менять направление, и если принять зависимость компонентов вектора ξ от ϕ в виде $\xi_{\tilde{\omega}, \phi, z} \propto \exp[im\phi]$, то после несложных преобразований получим

$$M\xi = (\mathbf{v}_M \cdot \nabla)\xi + im\Omega\xi + \Omega \times \xi. \tag{19.15}$$

Если движения в невозмущенной системе представляют чистое вращение, т.е. если мы пренебрегаем меридиональными потоками, то нужно лишь положить $\mathbf{v}_M = 0$ в уравнении (19.15). Отметим для полноты, что в случае чистого вращения ($\mathbf{v}_M = 0$)

$$M^2\xi = M(M\xi) = -m^2\Omega^2\xi + 2im\Omega(\Omega \times \xi) + \Omega \times (\Omega \times \xi), \tag{19.16}$$

и ясно, что данная величина порядка Ω^2.

Подставляя (19.15) в (19.11), получаем следующее выражение для поправки вследствие вращения к адиабатической угловой частоте (с точностью до первого порядка относительно Ω):

$$\sigma' = -(m/J)\int\limits_V \Omega\xi^* \cdot \xi\rho d\tau + (i/J)\int\limits_V \xi^* \cdot (\Omega \times \xi)\rho d\tau + O(\Omega^2). \tag{19.17}$$

При $\Omega = \mathrm{const}$ данное выражение согласуется с результатами [113; 333; 345, §82], если принять во внимание, что уравнение (19.17) было получено в инерциальной, а не во вращающейся системе отсчета. Второй интеграл в (19.17) также оказывается пропорциональным m. Это следует из того, что с учетом $\Omega_\phi = 0$ подынтегральное выражение в рассматриваемом интеграле пропорционально компоненту ξ_ϕ, который в свою очередь содержит не только множитель $\exp(im\phi)$, как все остальные компоненты ξ, но еще и пропорционален m. Отметим, что по порядку величины $|\sigma'| \sim |\Omega|$.

В случае твердотельно вращающейся звезды ($\Omega = \mathrm{const}$) выражение для расщепления частот иногда целесообразно записать в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω. Тогда соответствующая поправка к частоте колебаний будет образована лишь вторым слагаемым в правой части уравнения (19.17). Этот результат становится понятным, если принять во внимание, что нерадиальные колебания с $m \neq 0$ представляют собой азимутальные бегущие волны, распространяющиеся при $m < 0$ в направлении возрастания ϕ, а при $m > 0$ в направлении убывания ϕ.

Из уравнения (19.17) следует, что при $m = 0$ *все члены первого порядка относительно* Ω обращаются в нуль. Второй член в правой части равен нулю, потому что при $m = 0$ величина ξ чисто вещественная. Таким образом, с точностью до членов первого порядка относительно Ω вращение не оказывает никакого влияния на частоту колебаний в случае произвольного осесимметричного возмущения (как частный случай сюда входят и квазирадиальные ко-

лебания). При таких возмущениях только члены второго н более высоких порядков по Ω как-то влияют на частоты колебанний.

Отметим далее, что в правой части уравнення (19.17) все члены первого порядка по Ω чисто вещественные. Второй член вещественный потому, что величина $\xi^* \cdot (\Omega \times \xi)$, как легко показать, чнсто мнимая. Можно показать также, что и все члены второго порядка по Ω в правой части (19.17) чисто вещественные. Таким образом, справедливо утверждение, что поправки на вращенне к собственной частоте имеют осцилляторный характер (т.е. являются вещественными), по крайней мере с точностью до членов $O(\Omega^2)$ включительно.

Вещественность σ' [с точностью до членов $O(\Omega^2)$] позволяет дать интересную ннтерпретацию колебательной конвекции с нарастающей амплитудой. Если величина σ_0 в разложенни $\omega = \sigma_0 + \sigma'$ чисто мнимая (что соответствует дннамической неустойчнвостн невращающейся звезды), то, значит, величина ω комплексная, что соответствует лнбо нарастающим, либо затухающим колебаниям. Как было указано в гл. 17, динамнчески неустойчнвые g-моды тесно связаны с конвекцией; более того, такая динамическая неустойчнвость обычно ннтерпретируется как конвективная неустойчивость. Следовательно, σ_0 определяет характерное время развития (или затухання) таких двнжений, которые в невращающейся звезде были бы обычной конвекцией, а во вращающейся звезде представляют собой колебательную конвекцию с нарастающей амплитудой. Это характерное время определяется прежде всего свойствамн конвективно неустойчивой области и по существу не зависит (во всяком случае, непосредственно) от периода вращения звезды. С другой стороны, пернод колебанний для такой колебательной конвекцнн определяется только величиной σ', которая в свою очередь зависнт только от скорости вращения и от внутреннего строения звезды.

С физической точки зрения колебательный характер рассматриваемых движений является непосредственным отражением того, что сила Кориолиса $\propto -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_0$. Так, например, динамически неустойчивый поднимающийся или опускающийся элемент вещества испытывает вследствие вращения звезды действие силы Кариолиса, которая заставляет его отклоняться в сторону, в результате чего он движется с определенной периодичностью вдоль кольцеобразной траектории, а не просто вверх или вннз.

В работе [257] было рассчитано (с точностью до членов первого порядка относнтельно Ω) расщепление частот нерадиальных колебаний звезд с медленным дифференциальным вращением. Составляющие вектора ξ в сфернческих координатах, т.е. ξ_r, ξ_θ и ξ_ϕ обычно записывают через две функции $a(r)$ и $b(r)$, завнсящие только от r и определенные в [345, §82]. (Эти a и b не следует смешнвать с a и b из п. 19.1б.) Они пропорциональны соответственно радиальной и тангенциальной составляющим вектора ξ (разд. 17.3). Кроме того, $a(r)$ н $b(r)$ — это решения приведенных в разд. 17.5 обыкновенных днфференциальных уравнений адиабатических нерадиальных колебанний статической сферической звезды. Если по всей звезде Ω = const, то можно показать, что в ннерциальной снстеме координат

$$\sigma' = -m\Omega(1 - C), \tag{19.18}$$

где

$$C = \int_0^R \rho r^2(2ab + b^2)dr / \int_0^R \rho r^2[a^2 + l(l+1)b^2]dr. \qquad (19.19)$$

Ясно, что C завнснт от внутреииего строеиия звезды и от свойств ее аднабатнческих колебаиий; обычно $C < 1$. Тогда из уравнеиия (19.18) следует, что, напрнмер, те моды нераднальных колебаннй, которые соответствуют волиам, распространяющимся в иаправлеинн увеличення азнмутального угла (т.е. моды с $m < 0$ нли моды с «прямым» двнженнем, совпадающим с иаправленнем вращення), имеют прн налнчнн вращення несколько более высокне частоты (меиьшие перноды), чем без вращення. (Данный результат отчасти связан с тем, что σ' — это возмущенне угловой частоты, рассматриваемое в ннерцнальиой системе отсчета. В снстеме координат, вращающейся с угловой скоростью Ω, возмущенне угловой частоты было бы равным $\sigma' + m\Omega = m\Omega C$; следовательио, моды с прямым двнженнем, т.е. с $m < 0$, нмелн бы в этой системе коордннат меньшне частоты, чем моды с обратиым движеиием.)

Интересно отметнть, что, согласно [53], для g-мод в белых карлнках $|a(r)| \ll |b(r)|$, и поэтому для таких колебаний, как следует нз выражения (19.19), $C \approx 1/[l(l+1)]$. А тогда можио показать, что во вращающейся снстеме коорднннат поправка вследствие вращення к фазовой скорости азнмутальиой бегущей волны иерадиальных колебанній белого карлика будет равиа прнблнзнтельно $-\Omega/[l(l+1)]$ [625].

19.1г. ВЛИЯНИЕ НЕАДИАБАТИЧНОСТИ

Неадиабатическне колебання вращающихся звезд нзучены очень плохо. Пожалуй, некоторый ннтерес в зтой связи представляет работа Айземаиа и Кокса [7], которые для звезды с произвольиым устаиовнвшнмся вращеннем получнлн формальное решенне лннеарнзованных уравнений иерадиальных неаднабатических колебанній, т.е. определилн коэффициент устойчивости $\varkappa$ (см. гл. 9 н 16). Интересио, что в результнрующее выраженне для $\varkappa$ входят иесколько членов, связанных с нарушеннем теплового равновесня (разд. 19.4). Но в коице концов этот вывод не должеи нас удивлять, поскольку, как мы уже указывалн, вращающаяся звезда не может находиться в тепловом равновеснн.

По-вндимому, нанболее важиым результатом рассматрнваемой работы является то, что основной вклад в коэффнциеит $\varkappa$ все еще вноснт, как правнло, обычный нитеграл C (разд. 16.2). (Это C не следует путать с C нз п. 19.1в.) Точиее, Айземан н Кокс получили следующее выраженне для коэффнцнента устойчнвостн $\varkappa$:

$-\varkappa = C_r/2K +$ члены, связаиные с нарушеннем теплового равновесня, (19.20)

где C_r — вещественная часть ннтеграла C [см. уравненне (16.21)], а K — некоторая велнчнна, определенная в [7] н пропорцнональиая полной кинетнческой знергнн вращающейся пульснрующей звезды. Айземан н Кокс показалн, что соотношение (8.54) сохраняет заключенный в ием относнтельно простой фн-

зический смысл также для такой пульсирующей системы, которая в невозмущенном (неосциллирующем) состоянии характеризуется произвольными, но установившимися внутренними движениями.

Чтобы иметь хоть какое-то представление об устойчивости расщепленных вращением подуровней нерадиальных колебаний, Хансен, Кокс и Кэррол [255] исследовали вибрационную устойчивость этих подуровней в квазиадиабатическом приближении, считая вращение настолько медленным, что можно пренебречь несферичностью звезды. Для упрощения вычислений авторы использовали приближение Каулинга (разд. 17.9). Кроме того, они учли некоторые результаты Айземана и Кокса [7]. Основной вывод работы в применении к звездам спектрального класса B главной последовательности и к белым карликам состоит в том, что моды с прямым движением ($m < 0$) всегда несколько менее устойчивы, чем моды с обратным движением ($m > 0$).

Ряд попыток определить влияние некоторых эффектов медленного вращения на неадиабатические нерадиальные колебания описан в работе [476].

19.2. Влияние магнитных полей

На звездное вещество, пронизанное крупномасштабными магнитными полями, действуют не только обычные силы, такие, как гравитация, но и силы чисто электромагнитного происхождения.

Как и в случае вращающихся звезд, при наличии крупномасштабных магнитных полей исходная «статическая» модель, колебания которой предполагается исследовать, уже сама по себе оказывается в значительной степени неопределенной, и подобным моделям посвящен целый ряд работ (см., например, [60; 112; 159, 183; 337; 342; 345, §83; 371; 378 — 384; 467; 468; 486; 624; 630]). Согласно исследованиям Тейлера с сотрудниками [360, 361, 566, 567, 631], многочисленные конфигурации магнитного поля, предлагавшиеся в прошлом для магнитных звезд, могут быть подвержены влиянию локальных неустойчивостей.

Тем не менее существует ряд работ, посвященных колебаниям магнитных звезд. До сих пор все подобные исследования ограничивались анализом линейного адиабатического приближения, но даже в таком случае возникающие трудности очень велики. Хорошее обсуждение некоторых из этих проблем содержится в [345, §83]. Граничные условия также оказываются сложными (см., например, [526]). Многочисленные ссылки на исследования в данной области можно найти в обзорных статьях [133, 136]. В частности, см. [239—241, 243]. Изучалось влияние на звездные пульсации некоторых комбинированных эффектов вращения и магнитных полей [82].

Не вдаваясь в детали, отметим, что изученные частные случаи наводят на мысль, что в отличие от вращения, которое полностью снимает вырождение нерадиальных колебаний, магнитное поле снимает это вырождение лишь частично, т.е. при заданном значении l каждая частота расщепляется только на $(l + 1)$ подуровень с $|m| = 0, 1, \ldots, l$.

Такое частичное снятие вырождения по m при наличии магнитного поля можно объяснить следующим образом. Нерадиальные колебания с $m \neq 0$ со-

ответствуют азимутальиым бегущим волиам [ср. уравиеиие (17.36′)], причем иаправлеиие распростраиеиия волиы зависит, очевидио, от зиака m. При вращеиии иаправлеиие распростраиеиия волиы оказывается прямым или обратиым, т.е. зиак m имеет физический смысл. В присутствии магиитиого поля, очевидио, иет иикакого физического различия между $+m$ и $-m$, если иепульсирующая система осесимметричиа; т.е. существеииа лишь абсолютиая величииа $|m|$. Поэтому в уравиеиия входит только $|m|$. Отметим также, что, как следует из аиализа частиых случаев, поправка к частоте колебаиий, обусловлеииая иаличием магиитиого поля, по порядку величины составляет $|\sigma'_{\rm mag}| \sim |\sigma_0| E_{\rm mag}/E_{\rm grav}$, где σ_0 — иевозмущеииая угловая частота (т.е. угловая частота при отсутствии магиитиого поля); $E_{\rm mag}$ — полиая магиитиая эиергия звезды, $E_{\rm mag} \sim H^2R^3$, где R — радиус звезды, а H — иапряжеииость магиитиого поля; наконец, $E_{\rm grav}$ — гравитациоииая зиергия звезды, $E_{\rm grav} \sim GM^2/R$.

Если прииять $|\sigma'_{\rm rot}| \sim |\Omega|$, где $\sigma'_{\rm rot}$ — возмущеиие угловой частоты вследствие вращеиия, то, согласио [257], условие $|\sigma'_{\rm mag}| \ll |\sigma'_{\rm rot}|$ можио по порядку величииы выразить в следующем виде:

$$E_{\rm mag} \ll (E_{\rm rot}E_{\rm grav})^{1/2}, \tag{19.21}$$

где $E_{\rm rot}$ — кииетическая эиергия вращеиия, $E_{\rm rot} \sim MR^2\Omega^2$. В [257] указаио, что расщеплеиие вследствие магиитиых полей, вероятио, много меиьше расщепления вследствие вращения, если только магнитные поля ие являются очень сильными, скажем порядка 10^5 Гс для звезд верхней части главиой последовательиости или порядка 10^{10} Гс для остывающих белых карликов, причем в обеих этих оценках использоваиы типичные для указаниых групп звезд зиачения параметров.

19.3. Влияние конвекции

При рассмотрении влияиия коивекции иа пульсации звезд обычио выделяют два главиых аспекта. Во-первых, коивекция может влиять иа виутреииее строеиие иевозмущеииой, или статической, звезды, а во-вторых, оиа может оказывать более или меиее иепосредствеииое влияиие иа сами пульсации. Такое разделеиие эффектов коивекции иа две части правомерио, если пульсации малы, т.е. если оии рассматриваются лишь как иекоторое возмущеиие статической звезды. Одиако в случае пульсаций с коиечиой амплитудой ие ясио, оправдаио ли такое умозрительиое разделеиие эффектов (см. иииже).

Первый из этих эффектов — влияиие иа статическую модель — обычио исследуют с помощью теории длииы перемешиваиия в той или иной формулировке, иапример [610] или [49] (см. также [146. Ch. 14; 245]),или с помощью некоторой модификации этой теории (иапример, [419, 539, 583 — 585, 587]; см. также [396, 397]). Такие статические модели как исходные модели пульсирующих звезд были построеиы, иапример, в работах [37, 103, 104, 122, 263, 281, 477, 582]. При рассмотреиии пульсаций подобиых моделей вариациями коивективиого потока обычио либо совсем преиебрегают (как практически во всех цитироваиных работах), либо учитывают их каким-то сильио упрощеи-

ным способом (как предложеио, например, в [117]). Влняние конвекцнн на строеиие статической звезды было прннято во вннманне, чтобы объясннть ряд свойств некоторых тнпов пульснрующнх звезд (в частностн, массы «цефенд с бненнямн»; см. обзор [138]).

В работах [65, 244, 246, 589] (см. также [224, 540, 541, 583 — 585, 587, 627]) было сделано несколько попыток сформулнровать теорню неустановнвшейся звездной коивекцнн. Однако большнство зтнх попыток основывалось на той нлн ниой модификации теорнн длнны перемешнвання н ее иензбежных допущеинях.

Основательно подошел к проблеме неустановнвшейся конвекцни Дюпри [174 — 182]. Он чнсленно решнл нелииейиые уравнення неразрывностн, нмпульса и зиергии в коквективно неустойчивой области, считая завнсимые перемеииые фуикциями временн н двух пространствеииых координат. Из-за недостатка машиниого временн ему удалось проследить движеиие только самых больших коивективных ячеек. Введя козффнцнент турбулеитной вязкости, Дюпри исследовал распад зтнх большнх внхрей на меньшне и последующнй турбулентный каскад, который в конце концов днсснпнрует в тепло. Пожалуй, наиболее существеиое предположеиие в работах Дюпрн — зто то, что конвекцню можио адекватио опнсать в пространстве двух нзмереннй (реальное пространство трехмерно). Но даже в таком приближеини вычислеиия очень трудоемкн. Тем не менее в осиовиом расчеты могут быть фнзнческн правнльиымн, и оии, возможио, действительно дали нам первое физнческое объясненне того, какнм образом коивекция может обеспечить возврат к устойчивостн на красной границе полосы иеустойчиостн цефеид.

Широко распространено мненне, что нменно существоваине коивекцни в звездной оболочке приводит к прекращеиию пульсацнй на красной (ннзкотемпературной) граннце полосы иеустойчивости, как предположилн Бейкер н Кнппеихаи [37] и др. Связь между конвекцней в оболочке н положением красиой граннцы полосы неустойчивости цефеид была рассмотрена Бем-Внтензе и Нельсоном [50] на основе теорнн длины перемешиваиня. Бейкер н Гаф [33] определили положеиие красной граннцы полосы неустойчнвости с помощью некоторой модификацн зтой теорнн. Однако расчеты Дюпрн далн положенне красной граннцы по крайней мере для переменных тнпа RR Лиры, а повидимому, н для цефенд, без всякого прнвлечення феноменологнческнх теорнй коивекции, например теорнн длнны перемешнвания. Хотя ряд особенностей работы Дюпрн можно подвергнуть крнтнке (н, вероятно, не без основаинй), тем не менее мы имеем в данном случае прнмер расчета теоретнческой красной границы, которая иаходится в разумиом согласин с наблюдениямн. Дюпрн [179 — 181] нсследовал завнснмость положения зтой расчетиой красиой граиицы от различиых факторов, такнх, как светнмость, химнческнй состав н обертонные пульсации. Расчет положеиия красиой граннцы, выполненный Бейкером н Гафом [34] иа осиове теорин Гафа [246], по существу согласуется с результатамн Дюпрн.

Из работ Дюпрн вырнсовывается фнзическая картнна того, как конвекцня может прнводнть к прекращеиию пульсаций на красиой граиице полосы иеустойчнвостн. Дюпри установил, что конвектнвнй поток тепла макснмален

приблизительно в момент максимального сжатия коивективиых областей (т.е. примерно тогда, когда радиус звезды мииимален). Следовательно, в зтой фазе колебаиия конвекция (иаиболее зффекивная в зоие ионизации водорода) вызывает отток энергии, задержаииой совместиым действием $\varkappa$- и γ-механизмов в зоие второй ионизации гелия (гл. 10). Таким образом, конвекция фактически подавляет раскачивающие эффекты зоны (или зон) ионизации. Согласио Дюпри, достаточно уже довольно слабой конвекции, чтобы подавить пульсации на красной границе полосы неустойчивости.

Вие сомнения, такая физическая картина представляется разумной и остается ждать, подтвердят ли дальиейшие расчеты ее правильность и полиоту.

Условное разделение эффектов коивекции, описанное в начале данного раздела, а именно рассмотрение влияния конвекции на статическую модель отдельно от ее иепосредственного влияния на сами пульсации, в подходе Дюпри в явиом виде нигде не встречается. Более того, Дюпри нашел, что существует довольно сильиое взаимодействие конвекции и пульсаций в том смысле, что эти явления, по-видимому, подавляют друг друга: пульсации препятствуют установлению эффективной конвекции, тогда как конвекция стремится подавить пульсации.

Эта особенность взаимосвязи конвекции и пульсаций позволила Дюпри [179] сделать вывод, что конвекция не должна иметь существеиого значеиия для звезд в полосе неустойчивости, за исключением очень близких окрестиостей красной граиицы. А тогда можно прийти к заключению, что детали кривых блеска и т.п., рассчитанных с использованием чисто лучистых моделей, практически не должны быть подвержены влиянию конвекции. Как уже отмечалось, имеиио такой вывод следует из работы Кастора [66], посвященной фазовому запаздыванию и описанной в гл. 11.

19.4. Влияние отсутствия теплового равновесия

Строение реальной статической звезды в общем случае изменяется со временем. Это обусловлено тем, что звезды эволюциоиируют (гл. 4), и вопрос заключается лишь в скорости измененияя статического состояния. Для большинства задач теории звездных пульсаций эта скорость так мала по сравнению со скоростями, связанными с пульсациями, что статическое состояние звезды можио с высокой точностью считать не меняющимся со временем. Это обычное приближение теории звездиых пульсаций, и оно использовалось во всех разделах иастоящей книги.

Обычно изменение статического состояния звезды происходит относительно медлеино, с кельвииовским или ядерным характерным временем. Однако в некоторых случаях статическая модель может измеияться довольно быстро. Примерами могут служить сравнительно поздние стадии эволюции, например, звезд, испытывающих быстрые тепловые изменения различного вида (например, гелиевую вспышку, происходящую при загорании гелия в вырожденном ядре звезды с относительно малой массой порядка $1\ M_\odot$, см., например, [259]; или довольно быстрое загорание гелия в тонком слоевом источнике, см., например, [232]).

По этим причинам полезно знать, будут ли медленные изменения статической модели иметь значение для вибрационных характеристик модели, и если они действительно окажутся важными, то как рассчитать их влияние. Такие медленные изменения статической модели обычно называют эффектами отсутствия теплового равновесия, поскольку они возникают всякий раз, когда $\varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho \neq 0$, где ε — полная интенсивность генерации термоядерной энергии на единицу массы, $\mathbf{F}$ — полный поток энергии, а ρ — плотность [поскольку звезда эволюционирует (гл. 4), она никогда не может точно находиться в состоянии теплового равновесия]. Хотя имеющиеся результаты (см. ниже) свидетельствуют о том, что эффекты отсутствия теплового равновесия обычно малы по сравнению с другими эффектами, но все же теория звездных пульсаций была бы неполной, если бы такие эффекты нельзя было учесть хотя бы в принципе.

По-видимому, первой работой на эту тему было исследование Томаса [571], описанное в [335, §13, р. 648]. Был использован подход, основанный на рассмотрении полной энергии звезды, определенной как сумма кинетической, тепловой и гравитационной энергий и названной Леду [335] динамической энергией.

Исходя из такого уравнения энергии, Като и Унно [295] исследовали проблему радиальных пульсаций звезды, не находящейся в тепловом равновесии. Затем Окамото [398] проанализировал некоторые из полученных результатов и применил их к звездам, находящимся в стадии гравитационного сжатия к главной последовательности. Он нашел, что эффекты отсутствия теплового равновесия иногда оказываются важными.

Позже эту проблему исследовал Саймон [512, 513]. Саймон и Шастри [520] применили полученные результаты к некоторым модам высокого порядка, рассмотрев сильно проэволюционировавшие модели звезд. Аксель и Перкинз [23] также исходили из уравнения энергии. Унно [589, 590] подошел к проблеме с точки зрения общего вариационного принципа, а Дейви [154] рассмотрел ее для некоторого частного случая, без помощи уравнения энергии.

Однако «энергетические» методы решения данной задачи подверглись критике со стороны Кокса, Хансена и Дейви [148] на том основании, что эти методы являются потенциальными источниками неопределенностей. Например, как было показано в гл. 4, для звезды возможно уравнение энергии по меньшей мере в двух формах: одна основана на полной энергии, определенной выше, в другой используется сумма только кинетической и гравитационной энергий. В [148] указано, что первое из этих уравнений приводит к появлению величин собственно второго порядка малости (т.е. квадратов малых величин), что, по-видимому, еще больше усложняет проблему. С другой стороны, при использовании второго уравнения члены собственно второго порядка не появляются, встречаются только произведения величин первого порядка. Кроме того, в [148] были высказаны возражения и относительно применения для решения данной задачи (практически во всех исследованиях) квазиадиабатического приближения.

Затем Кокс, Хансен и Дейви [148] вывели общее линеаризованное неадиабатическое уравнение движения для радиальных пульсаций термически нерав-

новесной звезды. Уравнение имеет третий порядок по времени и при его выводе предполагалось, что «статическая», или невозмущенная, модель явно зависит от времени. Временна́я зависимость, принятая для пульсационных величин, описывалась следующим образом (на примере выражения для $\delta r/r_0$):

$$\delta r/r_0 \equiv \zeta(m,t) = \xi(m,t)\exp\left(\int_0^t \omega(t')dt'\right), \qquad (19.22)$$

где индекс 0 соответствует «статическому» значению величины, а m — лагранжева массовая переменная. Амплитуда $\xi(m,t)$ и собственная частота $\omega(t)$ рассматривались как функции времени, потому что по предположению статическая модель изменяется со временем (хотя и медленно). Авторы предположили также, что $t_s/t_{ff} \gg 1$, где t_s — характерное время медленных эволюционных изменений статической модели, соответствующее по порядку величины кельвиновскому или ядерному времени (гл. 2), а t_{ff} — время свободного падения (гл. 2), которое обычно порядка периода пульсаций П. (Сделанное предположение будет кратко проанализировано ниже.) Используя затем метод, описанный в [336] (см. также гл. 9) и [146, ch. 27], авторы получили с точностью до $O(t_{ff}/t_s)$ интегральные выражения для частоты ω, записанной в виде

$$\omega = i\sigma - \varkappa_{\rm I}. \qquad (19.23)$$

Здесь σ — угловая частота колебаний, не подверженная (с указанной точностью) влиянию эффектов отсутствия теплового равновесия, а $\varkappa_{\rm I}$ — коэффициент устойчивости (гл. 9), причем индекс I означает, что этот коэффициент устойчивости связан с относительной амплитудой пульсаций $\delta r/r_0$. Интегральные выражения включают в себя довольно сложные интегралы по всей массе звезды от величин, характеризующих статическую модель, и от их производных по времени, умноженных на коэффициенты, квадратичные относительно собственных функций пульсирующей модели, причем эти собственные функции (строго говоря, неизвестные) являются в принципе решениями линеаризованного неадиабатического уравнения движения (аналогичные интегральные выражения были приведены в гл. 9).

Один из простейших из всех возможных случаев — адиабатические пульсации ($\delta P/P_0 = \Gamma_{1,0}\delta\rho/\rho_0$) однородной модели (т.е. модели с одинаковой по всему объему плотностью), испытывающей медленное гомологическое сжатие, при котором $r_0^{-1}\partial r_0/\partial t$ зависит только от времени, где r_0 — лагранжева пространственная координата; пульсации также считаются гомологическими, т.е. ξ постоянно в пространстве и во времени. Для этого случая часть коэффициента $\varkappa_{\rm I}$, связанная с отсутствием теплового равновесия, составляет

$$-(6\Gamma_{1,0} - 5)/\tau, \qquad (19.24)$$

где $\tau^{-1} \equiv -R_0^{-1}dR_0/dt$, R_0 — «равновесный» радиус статической модели, а показатель адиабаты $\Gamma_{1,0}$ считается постоянным в пространстве и во времени. Таким образом, для данного простого случая эффекты отсутствия тепло-

вого равновесия являются дестабилизирующими, если рассматривается сжатие звезды.

Дальнейшее обсуждение энергетических методов было проведено Дейви и Коксом [157], получившими явное выражение (точное до второго порядка малости) для скорости изменения суммы кинетической и гравитационной энергий звезды при отсутствии теплового равновесия. Как было установлено ранее [148], это уравнение не содержит никаких величин собственно второго порядка малости, в нем встречаются лишь произведения величин первого порядка. Кроме того, квазиадиабатическое приближение здесь в явном виде не использовалось.

Было показано, что для рассматриваемой суммы энергий коэффициент устойчивости, скажем $\varkappa_E$, основанный на упомянутом выражении, точно согласуется с результатами, полученными ранее в [295, 513, 520] с помощью энергетического подхода (в тех случаях, когда такое сравнение было возможным), но не согласуется ни с результатами использования метода малых возмущений Кокса, Хансена и Дейви [148], ни с результатами Унно [590].

Поэтому Дейви и Кокс [157] предложили «модифицированный» энергетический метод, основанный на средней скорости изменения одной лишь кинетической энергии, и показали, что такой подход приводит к точному согласию с результатами [148], полученными методом малых возмущений, по крайней мере для квазиадиабатических пульсаций. Однако, как отметил Демаре [166], представленное в [157] доказательство эквивалентности результатов, полученных энергетическим методом и методом малых возмущений, было основано на недостаточно общей зависимости от времени, принятой для пульсационных величин. Демаре [166] пришел к правильному выводу, что для термически неравновесной звезды существуют, по крайней мере в принципе, два коэффициента устойчивости: один для амплитуды, а другой для полной энергии пульсаций. Кроме того, он показал, что оба эти коэффициента связаны между собой простым соотношением (см. ниже).

Дейви и Кокс [157] отметили также, что коэффициенты устойчивости для относительных вариаций $\delta r/r_0$ и для абсолютных вариаций δr (обозначенные соответственно $\varkappa_{\mathrm{I}}$ и $\varkappa_{\mathrm{II}}$) оказались различными. Например, в сжимающейся звезде относительная вариация, по-видимому, возрастает быстрее, чем абсолютная. Авторы привели доводы в пользу того, что коэффициент $\varkappa_{\mathrm{II}}$ является более важным и имеет более глубокий физический смысл, чем $\varkappa_{\mathrm{I}}$.

Для квазиадиабатических гомологических колебаний однородной модели, испытывающей гомологическое сжатие при постоянном значении $\Gamma_{\mathrm{I},0}$, вклад в коэффициент $\varkappa_{\mathrm{II}}$, обусловленный отсутствием теплового равновесия, составляет

$$-(6\Gamma_{\mathrm{I},0} - 9)/4\tau, \tag{19.25}$$

где τ определено сразу после формулы (19.24).

Дальнейшее обсуждение метода малых возмущений провели Кокс, Дейви и Айземан [144]. В частности, было показано, что в выражении для коэффициента устойчивости термически неравновесных звезд можно с точностью до $O(t_{\mathrm{ff}}/t_s)$ пренебречь интегралами, включающими в себя изменения амплиту-

ды пульсаций [ξ в формуле (19.22)] со временем. Было также отмечено, что предположение $t_{ff}/t_s \ll 1$ (см. выше), которое обычно делают при изучении термически неравновесных звезд, эквивалентно предположению квазиадиабатических колебаний. Кроме того, было показано, что эти предположения практически всегда оправдываются для всех звезд, за исключением красных сверхгигантов малой массы.

Упомянутая выше связь между $\varkappa_E$ и $\varkappa_{II}$, как отметил Саймон [518], уже содержалась в работе [144]. Соотношение между двумя этими коэффициентами устойчивости таково:

$$\varkappa_E = \varkappa_{II} - (2J\Sigma^2)^{-1} d(J\Sigma^2)/dt,$$

где $J\Sigma^2$ определено в [148] [см. также уравнение (9.44)]. Как отмечено в [518], это выражение можно записать с точностью до $O(t_{ff}/t_s)$ в виде

$$\varkappa_E = \varkappa_{II} - (1/\sigma) d\sigma/dt. \tag{19.26}$$

Саймон [518] показал, что коэффициент устойчивости для скорости пульсаций идентичен $\varkappa_E$. Таким образом, упоминавшиеся энергетические методы дают информацию о скорости пульсаций (а не об амплитуде смещения), а это дает то преимущество, что скорость измеряется более или менее непосредственно.

Саймон отметил также, что в некоторых случаях коэффициент устойчивости для скорости пульсаций указывал на неустойчивость, тогда как коэффициент для амплитуды смещения свидетельствовал об устойчивости; или же имело место обратное. Саймон обсудил проблему устойчивости в целом и дал более общее определение пульсационной устойчивости термически неравновесных звезд.

Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее малые колебания звезды при отсутствии теплового равновесия, было непосредственно решено Айзенманом и Коксом [5] для нескольких простых случаев асимптотическими методами, разработанными советскими математики (см. [48, 213, 314, 376]). Во всех изученных случаях было достигнуто точное согласие с результатами, полученными ранее с помощью интегральных выражений. Решения, основанные на этих асимптотических методах были независимо получены Демаре [164, 165].

Дейви [156] также рассмотрел проблему квазиадиабатических радиальных колебаний термически неравновесных звезд исходя из дифференциального уравнения для амплитуды пульсаций. Он показал, что при $t_{ff}/t_s \ll 1$ функции, входящие в интегральные выражения, выведенные ранее в [144, 148], являются решениями линейного адиабатического волнового уравнения (гл. 8) без учета эффектов отсутствия теплового равновесия. В работах [144, 148] данный вывод фактически уже считался справедливым и был использован для получения некоторых численных результатов. Кроме того, с помощью разложений в степенной ряд (как в [465, гл. 3]) Дейви [156] удалось непосредственно решить это дифференциальное уравнение для нескольких случаев, изученных Айземаном и Коксом [5] посредством более мощных, но и намного более сложных асимптотических методов. Во всех случаях, даже в

том, где имело место «медленное» негомологическое движение (когда величина $r_0^{-1}\partial r_0/\partial t$ являлась функцией массовой переменной m, а также времени), было получено полное согласие результатов.

Шастри и Саймон [487] изучили влияние отсутствия теплового равновесия на некоторые радиальные моды модели звезды в состоянии, непосредственно предшествующем вспышке новой. Они использовали подход, основанный на рассмотрении динамической энергии, определенной выше. Кокс [134] исследовал влияние отсутствия теплового равновесия на пульсации термически неустойчивой звездной модели [232] со слоевым гелиевым источником методом малых возмущений, основанным на интегральных выражениях. В обоих случаях модели были далеки от теплового равновесия, а медленное движение было в значительной степени негомологическим. Эффекты отсутствия теплового равновесия оказались заметными, но меньшими, по крайней мере в работе [134], чем другие эффекты. В [487] учет этих эффектов привел к тому, что некоторые из мод, неустойчивых относительно малых возмущений, стали устойчивыми.

В работе Айземана и Кокса [6] представлено общее физическое рассмотрение проблемы пульсаций термически неравновесных звезд. Эффекты отсутствия теплового равновесия были условно разделены на две части: «динамическую» и «неадиабатическую». Динамическая часть не содержит никаких неадиабатических членов, т.е. такие эффекты имели бы место даже при идеально адиабатических колебаниях. Соответствующий коэффициент устойчивости определяется следующим выражением:

$$\varkappa_{\text{II, dyn}} = (1/2\omega)d\omega/dt = (1/2\sigma)d\sigma/dt, \tag{19.27}$$

где ω определено соотношением (19.23), а σ — мгновенная угловая частота колебаний. Последнее равенство в (19.27) выполняется с точностью до $O(t_{\text{ff}}/t_s)$. Рассмотренный вклад обусловлен только изменением масштаба в инерциальном члене уравнения импульса (для одномерного гармонического осциллятора это эквивалентно изменению коэффициента упругой силы, см. [6]. — *Перев.)*. Он был впервые выделен Унно [590]. Динамический член содержит в себе всю разность между коэффициентами устойчивости для относительных и абсолютных вариаций (см. выше).

Неадиабатическая часть обусловлена только неадиабатическими эффектами (т.е. приращениями и потерями тепла) и не зависит ни от каких эффектов, связанных с медленным изменением размеров статической модели. Этот член одинаков для относительных и абсолютных вариаций. Как показано в [6], данный вклад в коэффициент устойчивости является, как правило, дестабилизирующим в случае сжатия, и этот эффект легко объяснить физически посредством рассмотрения малых фазовых сдвигов между локальными вариациями давления δP и плотности $\delta\rho$ (гл. 9). Так, если некоторая область сжимается, то она обычно теряет тепло, и величина $(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)_0$ будет отрицательной. Эта локальная потеря тепла, вызванная отсутствием теплового равновесия в статической модели, для пульсирующей звезды эквивалентна некоторому источнику тепла и приводит к небольшому запаздыванию δP относительно $\delta\rho$, т.е. стремится усилить пульсации (гл. 9).

Условное разделенне эффектов отсутствия теплового равиовесня на две части было иезавнсимо выполиеио Демаре [164, 165], иазвавшнм зтн составляющие нзозитропийиой н иензозитропнйиой соответствеино.

Айземан н Кокс [6] показалн также, что с точностью до $O(t_{ff}/t_s)$ к нерадиальиым колебаниям термнческн неравновесиой звезды применимы те же самые соотношения, что и к ее раднальным колебаниям.

В важной работе Бачлера [57] пр ›блема колебаний термическн иеравиовесной звезды была рассмотрена с помощью метода двухмасштабных разложений, описанного в [107] (см. также ›азд. 13.4). Как отмечено в [57], преимуществом данного метода является, в частностн, то, что здесь иет необходимости ограничиваться линейной теорией, как это имело место во всех предыдущих нсследованиях.

Бачлер также пришел к выводу, что в согласии с [166, 518] [см. также обсуждение в связи с уравнением (19.26)] для термически неравиовесной звезды существуют два различных коэффициента иеустойчивостн, которые ниогда дают явно протнворечнвые результаты. Как уже говорилось, однн из коэффнцнентов устойчнвостн основан на рассмотреннн амплнтуды пульсаций, а другой — на рассмотреннн знергнн пульсаций (нли соответствующей скорости).

Бачлер [57] нсследовал такую протнворечнвую прнроду обоих коэффициентов устойчивостн н пришел к выводу, что подобная снтуация возникает из-за неправнльной постановки задачи о вибрацнонной устойчнвостн термнчески неравновесных звезд. Это объясняется в осиовном трудностью определения средннх по времени для тех величнн, которые не являются строго перноднческнмн. При выводе коэффнцнента устойчнвости Бачлер предложнл основываться на действнн (на единнцу массы), скажем, $I = \eta^2\omega$, где η — амплнтуда для δr. В качестве частнчного обоснования своего предложення он показал, что I является аднабатическим нnварнаитом в том смысле, что прн медленном нзмененни параметров звезды $dI/dt = 0$. Такая нnвариантность I находнтся в полном согласнн с вышепрнведенным аналнзом днnамнческого (нлн нзознтропийного) вклада в коэффицнент устойчнвостн. Это легко понять, поскольку еслн I не нзменяется, то $\eta \propto \omega^{-1/2}$, а нменно такая завнснмость получается н при рассмотреннн одиого лншь динамического нлн нзозитропнйного вклада в коэффнцнент устойчнвостн [см. уравнение (19.27)].

Как отметил Бачлер [57], его предложеине равносильно рассмотренню только неадиабатнческой или неизознтропнйиой части коэффнцнента устойчнвости. Действнтельно, легко показать, что коэффнцнент устойчнвостн, основанный на действии I, ндентнчен $\varkappa_{\mathrm{II,\,na}}$ — неаднабатической частн коэффициеита устойчнвостн для амплитуды нзмененнй раднуса. Исходя нз этого, мы можем прнвести здесь результат, полученный Айземаном н Коксом [6, Eq. (65)] для нерадиальных колебаннй (раднальиые колебання можно рассмотреть просто как частный случай, заменяя во всех уравнениях величину $(1/\rho)\nabla \cdot \mathbf{F}$ на $\partial L_r/\partial m$, где m — лагранжева массовая координата). Имеем

$$\varkappa_{\mathrm{II,\,na}} = \frac{1}{2}(\sigma^2 J)^{-1}(-C_r + D + G_{1,r} + G_{3,r}), \tag{19.28}$$

где C_r — вещественная часть интеграла C [см. уравнение (16.21)], J — осцилляторный момент инерции [см. уравнение (16.19)], а D, G_1 и G_3 — довольно сложные интегралы, связанные с отсутствием теплового равновесия и определенные в [6]. При постоянных значениях показателей адиабаты Γ_i интегралы G_1 и G_3 обращаются в нуль; интеграл D становится равным нулю для звезды в тепловом равновесии. Можно показать, что для рассмотренного выше простого случая квазиадиабатических гомологических колебаний однородной модели, испытывающей медленное гомологическое сжатие при постоянных Γ_i, коэффициент $\varkappa_{\mathrm{II,\,na}}$ имеет следующий вид:

$$\varkappa_{\mathrm{II,\,na}} = -3(\Gamma_{1,0} - 1)/2\tau, \tag{19.29}$$

где τ определено сразу после уравнения (19.24).

Бачлер также отметил, как уже высказывалось ранее Саймоном [516], что звездные пульсации с достаточно большой амплитудой могут оказывать обратное влияние на статическое строение звезды и тем самым на ее эволюцию.

Наконец, Вемури [609] провел численное сравнение результатов нескольких предыдущих работ о вибрационной устойчивости термически неравновесных звезд. В целом существует прекрасное согласие между результатами, полученными различными методами, если в них принимались сходные предположения. Так, интересно отметить, что использованный в [487] энергетический метод, который основан на рассмотрении динамической энергии звезды и в котором появляются квадраты малых величин, привел к результатам, в значительной степени согласующимся с результатами применения другого энергетического метода [157, 166], в котором встречаются лишь парные произведения различных величин первого порядка малости. Вемури [609] подтвердил результаты Демаре [166] и Саймона [518] о том, что для термически неравновесных звезд имеются по меньшей мере два коэффициента устойчивости (см. выше) и что между этими коэффициентами существует простая связь [см. уравнение (19.26)].

19.5. Эффекты общей теории относительности

В большинстве задач теории звездных пульсаций эффектами общей теории относительности, к счастью, почти всегда можно пренебречь. Однако в некоторых случаях, таких, как пульсации нейтронных звезд или белых карликов (или для таких экстремальных моделей, как в [579]), эти эффекты действительно необходимо учитывать. Поскольку всюду в настоящей книге мы действовали в рамках ньютоновской теории тяготения, наши замечания об эффектах общей теории относительности будут весьма краткими.

Релятивистская теория внутреннего строения звезд была подробно рассмотрена в работах [375, 573, 577 — 579, 618, 635].

Чисто радиальные колебания не могут привести к генерации гравитационного излучения, учет которого сильно усложняет проблему. Поэтому релятивистская теория таких колебаний в линейном адиабатическом приближении уже довольно тщательно разработана. (Термин «адиабатический» мы используем в классическом термодинамическом смысле, подразумевая отсутст-

вие теплообмена с окружающей средой, гл. 4.) Как впервые показал Чандрасекар [74—76], важное вариационное свойство, а также большинство других математических свойств таких колебаний для нерелятивистского случая (см. гл. 8) имеют близкие аналоги и в релятивистской теории (см., например, [41, 573]).

Очень интересный результат ряда вышеупомянутых исследований касается динамической устойчивости сферической звезды в общей теории относительности. Такая звезда может оказаться динамически неустойчивой под действием даже настолько слабых релятивистских эффектов, что они никак не влияют на ее строение в статическом состоянии. Если считать Γ_1 релятивистским обобщением соответствующего показателя адиабаты (см., например, [573, р. 282]), то критерий динамической устойчивости в общей теории относительности имеет, согласно [76], следующий вид:

$$\Gamma_1 - 4/3 > 2KGM/(c^2R) = 4{,}24 \cdot 10^{-6}K(M/M_{\odot})(R_{\odot}/R), \qquad (19.30)$$

где K — безразмерное число, значение которого зависит от концентрации звездного вещества к центру и обычно составляет приблизительно от 0,5 до 1,5 (см. также [46, 47]). Бисноватый-Коган и Блинников [45] также обсудили проблему динамической устойчивости с учетом релятивистских эффектов и привели многочисленные библиографические сылки. См. также работы [81, 262, 275].

Излучение гравитацинных волн связывают с нерадиальными колебаниями при $l \geqslant 2$ [l — степень сферической гармоники $Y_l^m(\theta, \phi)$]. Линейные адиабатические нерадиальные колебания в релятивистском приближении были рассмотрены в серии статей Торна с сотрудниками [62, 283, 393, 447, 574 — 576]; см. также [162, 496, 622]. Излучение гравитационных волн в моделях белых карликов было рассчитано Осаки и Хансеном [410]. Дэвис [160] рассмотрел влияние эффектов специальной теории относительности на лучистый перенос в звездах.

В работе [171] был найден вариационный принцип для линейных адиабатических нерадиальных колебаний жидких шаров в общей теории относительности. В [169, 170] этот вариационный принцип был применен к релятивистским моделям звезд для получения некоторой информации о свойствах их нерадиальных колебаний.

19.6. Вековая устойчивость

Проблема вековой устойчивости звезды связана с вопросом о том, будет ли звезда устойчивой относительно малых возмущений, налагаемых настолько медленно, что звезда в течение всего этого процесса остается в состоянии гидростатического равновесия (гл. 2). Таким образом, проблема вековой устойчивости связана с вопросом о том, будет ли звезда устойчива относительно малых отклонений от теплового равновесия. Следовательно, вековую устойчивость можно считать частным случаем пульсационной устойчивости. Уравнения, описывающие вековую устойчивость, можно вывести из уравнений для пульсационной устойчивости, если просто отбросить в них все дина-

мические члены (т.е. все члены, связанные с ускорениями). Соответствующее характерное время в проблеме вековой устойчивости является поэтому довольно большим, и можно ожидать, что существенные изменения в физической системе будут происходить с характерным временем порядка кельвиновского времени (гл. 2).

Вопросам вековой устойчивости посвящены многочисленные теоретические исследования, выполненные преимущественно в конце 60-х — начале 70-х годов. Недавно вышел в свет прекрасный обзор Хансена [252] на эту тему, в котором приведена обширная библиография, поэтому наше рассмотрение подобных вопросов будет очень кратким.

Практически во всех исследованиях предполагалось, что возмущения сферически симметричны, и если не оговорено особо, то мы тоже будем исходить из этого предположения. Лишь в нескольких работах рассматривались нерадиальные возмущения, см., например, [304, 463]. См. также очень четкое обсуждение проблемы в [305]*.

Вероятно, наиболее простой математически и наиболее полезный для понимания подход состоит в использовании интегральных выражений, аналогичных рассмотренным в разд. 9.3. Если предположить, что все возмущенные величины зависят от времени по закону $\exp[i\omega t]$, то соответствующим уравнением для собственных значений будет кубическое уравнение (9.43) и все входящие в него величины определены в разд. 9.3. Обозначая ω_1 вековой («малый») корень и принимая, что $|\omega_1|^2 \ll |\Sigma^2|$, приближенно получаем

$$\omega_1 \approx iC/(\Sigma^2 J). \tag{19.31}$$

Этот результат показывает, что движение будет апериодическим, если C чисто вещественно, причем если $C > 0$, то звезда будет устойчивой относительно вековых возмущений, поскольку, согласно разд. 8.11, для динамически устойчивой звезды ($\Gamma_1 > 4/3$, и мы рассматриваем только такой случай) всегда $\Sigma^2 J > 0$. (Используемый здесь символ C не следует смешивать с C из разд. 19.1.)

Как показал Хансен [252] (см. также [146, Ch. 27]), $|1/\omega_1| \sim t_K$, где t_K — кельвиновское время (гл. 2).

Кроме того, если движение является гомологическим (когда величина $\delta r/r$ по всей звезде одинакова), то из соотношения (19.31) легко получить обычный критерий Джинса [287]. Предполагая, что $\delta P/P$, $\delta\varkappa/\varkappa$ и $\delta\varepsilon/\varepsilon$ можно выразить через $\delta\rho/\rho$ и $\delta T/T$ с помощью простых соотношений типа (13.2), (13.3) [а также соотношения для $\delta\varepsilon/\varepsilon$, приведенного непосредственно перед (13.23)], легко представить интеграл C как функцию от n, s, λ, ν, χ_ρ и χ_T (все символы имеют обычный смысл), причем условием вековой устойчивости является неравенство $C > 0$. Тогда обобщенный критерий Джинса можно записать как

$$3\lambda + \nu(4 - 3\chi_\rho)/\chi_T > -4 - 3n + (s + 4)(4 - 3\chi_\rho)/\chi_T, \tag{19.32}$$

* В этот же круг вопросов попадает и проблема медленного перемешивания вещества в недрах звезд. Для Солнца эта проблема была исследована в [463], и оказалось, что оно устойчиво относительно такого перемешивания.

причем в случае идеального газа (когда $\chi_\rho = \chi_T = 1$) получаем обычный критерий Джинса $3\lambda + \nu > s - 3n$. Например, при типичных значениях $\lambda = 1$, $s = 3$ и $n = 1$ критерий Джинса требует, чтобы $\nu > -3$, а это очень слабое условие.

Физический смысл обобщенного критерия Джинса состоит в следующем. Рассмотрим звезду, первоначально находившуюся в состоянии теплового равновесия, $L = \int_M \varepsilon dm$. Предположим, что она испытала гомологическое сжатие на малую относительную величину $(-\xi)$ $(= \mathrm{const})$. Тогда относительное усиление термоядерного энерговыделения $\delta\varepsilon/\varepsilon$ определится левой частью неравенства (19.32), умноженной на $(-\xi)$. Умножение на $(-\xi)$ правой части соответствует относительному увеличению светимости звезды $\delta L/L$. Если условие Джинса (19.32) выполняется, то $\delta\varepsilon/\varepsilon > \delta L/L$, т.е. звезда накапливает тепло. Следовательно, полная энергия звезды E (сумма тепловой и гравитационной) должна возрастать. Поскольку по теореме вириала (гл. 2) $E = \mathrm{const} \times$ (гравитационная энергия) < 0, возрастание E означает увеличение радиуса звезды R, что противоположно направлению первоначального возмущения, так как мы рассматривали сжатие звезды (т.е. уменьшение R).

Описанную последовательность событий можно интерпретировать и через внутреннюю температуру звезды. Поскольку при гомологических изменениях температура изменяется, как правило, обратно пропорционально некоторой степени R (первой степени, если используется уравнение состояния идеального газа), то увеличение R означает уменьшение внутренней температуры. Следовательно, в рассматриваемом случае, когда звезда устойчива относительно вековых возмущений, можно сказать, что приращение тепла, сопровождающее первоначальное сжатие, заставляет звезду расширяться и охлаждаться, т.е. стремится вернуть ее в исходное состояние.

Реальная ситуация оказывается значительно более сложной, и в поведении звезды во времени часто присутствует компонент, связанный с колебаниями, что более полно описано в обзоре [252]. Кроме того, для звезд, находящихся на таких эволюционных стадиях, когда их внутреннее строение уже само изменяется примерно с кельвиновским характерным временем, точная интерпретация и смысл вековой устойчивости неясны.

19.7. Общее значение теории звездных пульсаций

Пожалуй, основное значение теории звездных пульсаций заключается в том, что она дает нам, по крайней мере в принципе, дополнительную возможность «зондирования» звездных недр. Очевидно, что характер колебаний звезды зависит от ее внутреннего строения, а также, вероятно, от других факторов, таких, как вращение, магнитное поле и т.д. Поэтому из наблюдений звездных пульсаций можно надеяться больше узнать о внутреннем строении звезд (а может быть, получить и другие сведения) в дополнение к данным, вытекающим из рассмотрения только статических характеристик звезд.

Хорошим примером подобного применения теории пульсаций является предложение Кристенсен-Далсгаарда и Гафа [89] использовать наблюдения

малых колебанний Солица (см. ссылкн в [89], а также [268, 270]) для изучения солнечных недр подобно тому, как ннформацня о сейсмнческнх колебаннях нспользуется для нсследовання земных иедр.

Фактнческн теорня раднальных пульсацнй уже много лет прнменяется в прнложеннн к цефендам и родственным тнпам переменных звезд (гл. 3). Напрнмер, как отмечено в гл. 8, для основной моды радиальных колебанннй звезды с $\Gamma_1 = 5/3$ пульсацноииая постоянная Q в соотношенин пернод — средняя плотность должна подчиняться условню $Q \leqslant 0,116^d$, где верхиий предел относнтся к однородной моделн (ρ = const по всему объему). Для довольно реалистнчных моделей с заметной концентрацней вещества к центру характерным значением является $Q \approx 0,04^d$, а более точное значенне завнсит от деталей строення звезды. Экспернментальные данные согласуются с предсказываемымн значеннямн, н это дает некоторую уверенность в том, что нам нзвестны правнльные значення по крайней мере нескольккх основиых параметров цефенд. [Интересно однако заметнть, что еще в 1932 г., за 20 лет до того, как Бааде [26] провел ревизию нуль-пункта завнсимостн пернод — светимость для цефеид (нсторня вопроса хорошо нзложена в [210], см. также [28]), Эддннгтон [198] отмечал, что в данных о цефендах содержнтся какая-то ошибка. Имевшиеся в то время данные иаблюдений указывалн на значения Q, блнзкне к верхнему пределу. Исходя из этого, Эддингтон сделал вывод, что цефенды должны быть более однороднымн по плотностн, чем другне звезды. Новый нуль-пункт прнвел к увелнченню светимости цефенд приблизнтельно в 4 раза, т.е. прн заданных показателях цвета или эффективной температуре раднусы увелнчнвалнсь вдвое по сравненню с предыдущими оценками. Бо́льшие раднусы означают меньшне средние плотностн, а значнт, более низкне Q, что согласуется с теоретическнмн предсказаниями.]

В настоящее время одной нз трудностей представляется «проблема масс цефенд», н она особенно серьезна для цефеид с бнениямн (нлн двупериоднческнх цефеид). Эта проблема обсуждена в двух обзорных статьях [116, 138], см. также [124, 139], где прнведена обшнрная бнблнографня. Вкратце применение теорнн раднальных пульсацнй к цефендам дает массы, которые, возможно, на 20 — 40% меньше значенний, предсказываемых эволюцнонныи расчетами. У цефенд с бнеинями «пульсацнонные» массы в 2 — 3 раза меньше «эволюцнонных». Прнчина расхождення этнх оценок в настоящее время не известна, но еслн она будет понята, то это, вероятно, может дать новые сведення о пульсацнях звезд н о другнх звездных параметрах (см., напрнмер, [114, 115, 124]). В любом случае эта трудность демонстрнрует нам, что теорня пульсаций может, по-вндимому, служнть нсточннком новой ннформации о звездах.

Что касается нераднальных колебанний, то недавние наблюдення н теоретнческие нсследовання показывают, что такие колебания могут быть весьма распространенным явленнем во многнх тнпах звезд. Напрнмер, наблюдения Мак-Гро [363] (см. также [392, 456 — 458]) наводят на мысль о существованнн нового класса переменных — звезд «типа ZZ Кнта». Полагают, что эти звезды — обычные белые карлнкн с эффектнвными температурамн около 10^4 К.

Как предположнл Мак-Гро [363], изменения блеска могут быть следствнем гравнтациоиных колебаний (g-мод) высокого порядка.

Еще одиим примером служат более или меиее периодические изменения профнлей лнний в спектрах звезд спектрального класса B, иаблюдавшиеся Смитом [531] н Смнтом и Мак-Коллом [537] (см. также [59, 533, 536]). Смит пришел к выводу, что эти измеиеиия можио объясиить только иерадиальными колебаииями, и в большиистве случаев удается даже провести предварительиое отождествлеиие мод колебаний. Смит иазвал эти звезды «звездами класса B с перемеииыми профилями лииий» или « звездами типа 53 Персея», и оии также могут представлять собой иовый класс перемеииых звезд.

Коиечио, для иитерпретации иаблюдеиий звездиой перемеииости с помощью иерадиальиых колебаний необходимо иметь иекоторое представленне о самой теорин.

Смит [531] высказал также предположеиие, что звезды типа β Цефея (гл. 3) и звезды класса B с перемеииыми профилями лииий могут быть родствеиными друг другу (п. 3.2в). До сих пор нн причина (илн причины), ни природа перемеииости звезд типа β Цефея ие нзвестны (обзор проблемы дан в [137, 294]; более свежие результаты представлеиы в [152, 474, 533, 549]).

Как предположили Люси [354], Осаки [409] и Дзембовски [190], нерадиальиые колебання очеиь высокого порядка могут быть довольио распростраиеииым явленнем в горячих звездах очеиь высокой светимости, поскольку модели подобиых звезд часто оказываются иеустойчивыми относительио таких возмущеиий. В наблюдениях нерадиальные колебания высокого порядка могут обнаружнваться как макро- нли микротурбулеитиость — природа этих явленнй долгое время оставалась неизвестиой. Кроме того, такие колебаиия могут играть некоторую роль в иагреве звездиых хромосфер и корои.

Накоиец, можио ожидать, что теория иерадиальиых колебаиий будет нметь фуидамеитальное зиачеиие для иитерпретации колебаиий объектов, которые в прииципе ие являются сферически симметричиыми. Примерами могут служить объекты, в которых имеется четко выделеииое иаправлеиие, иапример вращающаяся звезда нли диск. Другой пример — звезда, проиизаииая крупиомасштабиым магиитиым полем. Вероятио, колебаиия карликовых иовых после вспышек [455] можио отиести к быстро вращающемуся аккрециоииому диску [423]. (Одиако см. [551].) Было показаио, что вертикальиые иеосесимметричиые колебаиия аккрециоииых дисков вокруг белых карликов действительио имеют периоды в иаблюдаемом диапазоие [606].

ЛИТЕРАТУРА

Числа в скобках указывают номера глав или разделов, в которых цитируется данная работа.

1. *Abt H. A.* Astrophys. J., **126**, 138, 1957. (18.3)
2. *Abt H. A.* Astrophys. J., **130**, 769, 1959. (3.1)
3. *Adams T. F., Castor J. I.* Astrophys. J., **230**, 826, 1979. (11.3)
4. *Adams T. F., Davis C. G., Keller C. F.* Los Alamos Report LA-7598-MS, 1978. (12.2)
5. *Aizenman M. L., Cox J. P.* Astrophys. J., **194**, 663, 1974. (9.3, 19.4)
6. *Aizenman M. L., Cox J. P.* Astrophys. J., **195**, 175, 1975. (19.4)
7. *Aizenman M. L., Cox J. P.* Astrophys. J., **202**, 137, 1975. (19.1г)
8. *Aizenman M. L., Cox J. P., Lesh J. R.* Astrophys. J., **197**, 399, 1975. (17.10)
9. *Aizenman M. L., Hansen C. J., Ross R. R.* Astrophys. J., **201**, 387, 1975. (17.8)
10. *Aizenman M. L., Perdang J.* Astron. Astrophys., **15**, 200, 1971. (5.1)
11. *Aizenman M. L., Perdang J.* Astron. Astrophys., **17**, 190, 1972. (5.1)
12. *Aizenman M. L., Smeyers P.* Astrophys. Space Sci., **48**, 123, 1977. (17.3, 18)
13. *Aizenman M. L., Smeyers P., Weigert A.* Astron. Astrophys., **58**, 41, 1977. (17.8, 17.10)
14. Алешин В. И. Астрон. ж., **41**, 201, 1964. (12.2)
15. *Alfvén H., Fälthammar C. G.* Cosmical Electrodynamics, Clarendon Press, Oxford, 2nd ed., 1963. [Имеется перевод: Альвен Г., Фельтхаммар К. Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967.] (4.6)
16. *Aller L. H.* Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars, 2nd ed., Ronald Press, New York, 1963. [Имеется перевод: Аллер Л. Астрофизика. Т. I. Атмосферы Солнца и звезд. — М.: ИЛ, 1955.] (3)
17. Aller L. H., McLaughlin D. B., eds., Stellar Structure, University of Chicago Press, Chicago, 1965. [Имеется перевод: Внутреннее строение звезд/ Под ред. Л. Аллера и Д. Мак-Лафлина. — М.: Мир, 1970.]
18. *Ando H.* Publ. Astron. Soc. Japan, **28**, 517, 1976. (17.10, 18.3)
19. *Ando H., Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **27**, 581, 1975. (17.6б, 17.10, 17.14, 18.1, 18.3)
20. *Ando H., Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **29**, 221, 1977. (18.3)
21. *Andrew A. L.* Australian J. Phys., **20**, 363, 1967. (17.12)
22. *Auré J. L.* Astron. Astrophys., **11**, 345, 1971. (18.3)
23. *Axel L., Perkins F.* Astrophys. J., **163**, 29, 1971. (8.5, 19.4)
24. *Ayres T. R., Linsky J. L., Shine R. A.* Astrophys. J. (Letters), **195**, L121, 1975. (18.3)
25. *Baade W.* Astron. Nachr., **228**, 359, 1926. (3.3)
26. *Baade W.* Trans. IAU, **8**, 397, 1952. (19.7)
27. *Baade W.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **68**, 5, 1956. (3.1)
28. *Baade W.* Evolution of Stars and Galaxies, ed. Payne-Gaposchkin C., Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963. [Имеется перевод: Бааде В. Эволюция звезд и галактик. — М.: Мир, 1966.] (3.1, 19.7)

29. *Bahcall J. N.* Astrophys. J. (Letters), **216**, L115, 1977. (18.3)
30. *Bahcall J. N., Sears R. L.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 25, 1972. (18.3)
31. *Baker N. In* Stellar Evolution, eds. Stein R. F., Cameron A. G. W., Plenum Press, New York, 1966, p. 333. (13, 13.1, 13.3)
32. *Baker N. In* Stellar Evolution, eds. Chiu H.-Y., Muriel A., MIT Press, Cambridge, Mass., 1972, p. 155. (12.2)
33. *Baker N., Gough D. O.* Astron. J., **72**, 784, 1967. (19.3)
34. *Baker N., Gough D. O.* Astrophys. J., **234**, 232, 1979. (10.1, 19.3)
35. *Baker N., Kippenhahn R.* Z. Astrophys., **48**, 140, 1959. (19.1a)
36. *Baker N., Kippenhahn R.* Z. Astrophys., **54**, 114, 1962. (9.2a, 9.2б, 10.1, 10.2, 11.1, 18.3)
37. *Baker N., Kippenhahn R.* Astrophys. J., **142**, 868, 1965. (8.4, 9.2б, 10.1, 10.2, 11.1, 11.4, 19.3)
38. *Baker N., von Sengbusch K.* Mitteilungen Astron. Gesellschaft, No. 27, S. 162, 1969. (12.2)
39. *Baker N., von Sengbusch K.* Bull. Amer. Astron. Soc., **2**, 181, 1970. (12.2)
40. *Balona J. M., Stobie R. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **187**, 217, 1979. (3.3)
41. *Bardeen J. M., Thorne K. S., Meltzer D. W.* Astrophys. J., **145**, 505, 1966. (19.5)
42. *Batchelor G. K.* An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.] (4, 4.2, 19.1a)
43. *Bath G. T., Evans W. D., Pringle J. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **166**, 113, 1974. (3.2a)
44. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis, 2nd ed., Mc-Graw-Hill, New York, 1970. (8.12б)
45. *Bisnovatyi-Kogan G. S., Blinnikov S. I.* Astron. Astrophys., **31**, 391, 1974. (19.1a, 19.5)
46. *Bludman S. A.* Astrophys. J., **183**, 637, 1973. (19.5)
47. *Bludman S. A.* Astrophys. J., **183**, 649, 1973. (19.5)
48. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М: Наука, 1974. (19.4)
49. *Böhm-Vitense E.* Z. Astrophys., **46**, 108, 1958. (19.3)
50. *Böhm-Vitense E., Nelson G. D.* Astrophys. J., **210**, 741, 1976. (19.3)
51. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics, Pergamon Press, New York, 1959. (17.12)
52. *Breger M.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **91**, 5, 1979. (3.1, 18.3)
53. *Brickhill A. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **170**, 405, 1975. (3.2a, 18.3, 19.1в)
54. *Brown T. M., Stebbins R. T., Hill H. A.* Proc. of the Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 1. (1)
55. *Brown T. M., Stebbins R. T., Hill H. A.* Astrophys. J., **223**, 324, 1978. (1)
56. *Bryan G. H.* Phil. Mag. (5), **27**, 254, 1889. (19.1a)
57. *Buchler J. R.* Astrophys. J., **220**, 629, 1978. (12.2, 19.4)
58. *Burbidge G., Burbidge M.* Quasi-Stellar Objects, W. H. Freeman, San Francisco, 1967. [Имеется перевод: Бербидж Дж., Бербидж М. Квазары. — М.: Мир, 1969.] (1)
59. *Buta R., Smith M. A.* Astrophys. J., **232**, 213, 1979. (3.2в, 3.4, 17.6б, 19.7)
60. *Cameron A. G. W.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **8**, 179, 1970. (3, 19.2)
61. *Campbell L., Jacchia L.* The Story of Variable Stars, The Blakiston Co., Philadelphia, 1941. (1)
62. *Campolattaro A., Thorne K. S.* Astrophys. J., **159**, 847, 1970. (19.5)
63. *Canuto V.* Annals N. Y. Acad. Sci., **302**, 514, 1977. (3)
64. *Castor J. I.* Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1966. (11.1)
65. *Castor J. I.* Не опубликовано, 1968. (19.3)

66. *Castor J. I.* Astrophys. J., **154**, 793, 1968. (11.1 — 11.4, 19.3)
67. *Castor J. I.* Не опубликовано, 1970. (13, 13.4)
68. *Castor J. I.* Astrophys. J., **166**, 109, 1971. (8.3, 8.12б, 9.2а, 9.2б, 11.1, 11.4)
69. *Castor J. I.* Astrophys. J., **178**, 779, 1972. (4.3)
70. *Castor J. I., Davis C. G., Davison D. K.* Los Alamos Rept. LA-6664, 1977. (12.2)
71. *Chandrasekhar S.* An Introduction to the Study of Stellar Structure, University of Chicago Press, Chicago, 1939. [Имеется перевод: Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. — М.: ИЛ, 1950.] (8.3, 8.12в, 17.5б)
72. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon Press, Oxford, 1961. (5.1, 17.2, 17.3, 19.1а)
73. *Chandrasekhar S.* Astrophys. J., **138**, 896, 1963. (15.2)
74. *Chandrasekhar S.* Phys. Rev. Letters, **12**, 114, 1964. (8.10, 19.5)
75. *Chandrasekhar S.* Phys. Rev. Letters, **12**, 437, 1964. (8.10, 19.5)
76. *Chandrasekhar S.* Astrophys. J., **140**, 417, 1964. (8.10, 19.5)
77. *Chandrasekhar S.* Astrophys. J., **139**, 644, 1964. (15.2, 17.7)
78. *Chandrasekhar S.* Observatory, **92**, 116, 1972. (19.1а)
79. *Chandrasekhar S., Fermi E.* Astrophys. J., **118**, 116, 1952. (4.6)
80. *Chandrasekhar S., Lebovitz N. R.* Astrophys. J., **140**, 1517, 1964. (15.3)
81. *Chanmugam G.* Astrophys. J., **217**, 799, 1977. (19.5)
82. *Chanmugam G.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **187**, 769, 1979. (19.2)
83. *Chiu H.-Y.* Stellar Physics, Blaisdell, Waltham, Mass., 1967. (4.3)
84. Chiu H.-Y., Muriel A., eds., Stellar Evolution, MIT Press, Cambridge, Mass., 1972.
85. *Christensen-Dalsgaard J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **174**, 87, 1976. (17.8)
86. *Christensen-Dalsgaard J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **190**, 765, 1980. (Предисловие, III, 17, 17.8 — 17.10, 17.12, 18)
87. *Christensen-Dalsgaard J., Dilke F. W. W.,* Gough D. O. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **169**, 429, 1974. (7.6, 18.2а, 18.3)
88. *Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O.* Mem. Soc. R. Sci. Liège, **8**, 309, 1975. (18.3)
89. *Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O.* Nature, **259**, 89, 1976. (19.7)
90. *Christy R. F.* Astrophys. J., **136**, 887, 1962. (10.2, 12.2)
91. *Christy R. F.* Rev. Mod. Phys., **36**, 555, 1964. (11.1, 12.2)
92. *Christy R. F.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **4**, 353, 1966. (1)
93. *Christy R. F.* Astrophys. J., **144**, 108, 1966. (5.1)
94. *Christy R. F. In* Proc. IAU Symp. No. 28, Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres, ed. Thomas R. N., Academic Press, London, 1967, p. 105. (1)
95. *Christy R. F.* Quart. J. Roy. Astron. Soc., **9**, 13, 1968. (1, 3.3)
96. *Christy R. F.* SIAM Rev., **10**, 291, 1968 (Phys. Abstr., **72**, 240, 1968.) (1)
97. *Christy R. F.* J. Roy. Astron. Soc. Canada, **63**, 299, 1969. (1)
98. *Christy R. F.* J. Roy. Astron. Soc. Canada, **64**, 8, 1970. (1)
99. *Clayton D. D.* Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, McGraw-Hill, New York, 1968. (4.3, 5.2)
100. *Clement M.* Astrophys. J., **140**, 1045, 1964. (15.3, 19.1б)
101. *Cline T. L., Desai U. D.* Astrophys. Space Sci., **42**, 17, 1976. (1)
102. *Cocke W. J., Disney M. J., Taylor D. J.* Nature, **221**, 529, 1969. [Имеется перевод: Пульсары: Сб. статей. — М.: Мир, 1971, с. 137.] (1)
103. *Cogan B. C.* Astrophys. J., **162**, 139, 1970. (3.2б, 8.6, 19.3)
104. *Cogan B. C.* Astrophys. J., **211**, 890, 1977. (3.2б, 19.3)
105. *Cogan B. C.* Astrophys. J., **221**, 635, 1978. (3.2б, 3.3)
106. *Cogan B. C.* Astrophys. J. (Letters), **225**, L39, 1978. (3.2б)

107. *Cole J. D.* Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell, Waltham, Mass., 1968. [Имеется перевод: Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.] (12.3, 13.4, 19.4)
108. *Condon E. U.*, *Shortley G. H.* The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press, Cambridge, 1935. (17.3)
109. *Cowling T. G.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **101**, 367, 1941. (17.7 — 17.9)
110. *Cowling T. G.* Astrophys. J., **114**, 272, 1951. (18.2)
111. *Cowling T. G.* Magnetohydrodynamics, Interscience, New York, 1957. [Имеется перевод: Каулинг Т., Магнитная гидродинамика. — М.: Мир, 1964.] (4.6)
112. *Cowling T. G. In* Stellar Structure, eds. Aller L. H., McLaughlin D. B., University of Chicago Press, Chicago, 1965, p. 425. (19.2)
113. *Cowling T. G.*, *Newing R. A.* Astrophys. J., **109**, 149, 1949. (19.1a, 19.1в)
114. *Cox A. N.* Sky and Telescope, **55**, 115, 1978. (3.2б, 19.7)
115. *Cox A. N. In* Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, eds. Fischel D., Lesh J. R., Sparks W. M., NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D. C., 1980, p. 69. (3.2б, 19.7)
116. *Cox A. N.* Astrophys. J., 229, 212, 1979. (3.3, 3.4, 19.7)
117. *Cox A. N.*, *Brownlee R. R.*, *Eilers D. D.* Astrophys. J., **144**, 1024, 1966. (8.12б, 12.2, 19.3)
118. *Cox A. N.*, *Cox J. P.* Sky and Telescope, **33**, 278, 1967. (1)
119. *Cox A. N.*, *Cox J. P. In* Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 115. (3.2б)
120. *Cox A. N.*, *Davis C. G.* Dudley Obs. Rep., **9**, 297, 1975. (3.3)
121. Cox A. N., Deupree R. G., eds, Proc. of the Solar and Stellar Pulsation Conference, Los Alamos Sci. Lab. Report UC-34b, 1976. (1, 12.2)
122. *Cox A. N.*, *Deupree R. G.*, *King D. S.*, *Hodson S. W.* Astrophys. J. (Letters), **214**, L127, 1977. (3.2б, 19.3)
123. *Cox A. N.*, *Hodson S. W.*, *Davey W. R. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 188. (12.2)
124. *Cox A. N.*, *Hodson S. W.*, *King D. S.* Astrophys. J. (Letters), **230**, L109, 1979. (3.2б, 19.7)
125. *Cox A. N.*, *King D. S.*, *Tabor J. E.* Astrophys. J., **184**, 201, 1973. (10, 10.3)
126. *Cox A. N.*, *Stewart J. N.* Astrophys. J. Suppl., **19**, 243, 1970. (4.3)
127. *Cox A. N.*, *Tabor J. E.* Astrophys. J. Suppl., **31**, 271, 1976. (4.3)
128. *Cox J. P.* Astrophys. J., **122**, 286, 1955. (7.6, 10.1, 10.2)
129. *Cox J. P.* Astrophys. J., **127**, 194, 1958. (10.2)
130. *Cox J. P.* Astrophys. J., **130**, 296, 1959. (10.3)
131. *Cox J. P.* Astrophys. J., **138**, 487, 1963. (9.2a, 9.2б, 10.2, 10.3, 11.1, 11.4)
132. *Cox J. P. In* Proc. IAU Symp. No. 28, Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres, ed. Thomas R. N., Academic Press, London, 1967, p. 3. (1, 2.1, 8.8, 8.12в, 9.2б)
133. *Cox J. P.* Rep. Prog. Phys., **37**, 563, 1974. (1, 3, 3.1, 4.3, 5.1, 8.12в, 8.15, 9, 9.1, 10, 10.2, 10.3, 11, 11.1, 11.2, 11.4, 12, 12.1, 12.2, 13.4, 19.1a, 19.2)
134. *Cox J. P.* Astrophys. J. (Letters), **192**, L85, 1974. (19.4)
135. *Cox J. P.* Mem. Soc. Roy. Sci. Liège, Coll. 8°, 6ᵉ Ser. **8**, 129, 1975. (1, 12.2)
136. *Cox J. P.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **14**, 247, 1976. (1, 7.6, 17, 17.2, 17.8, 19.1a, 19.2)
137. *Cox J. P. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 127. (19.7)
138. *Cox J. P. In* Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, eds. Fischel D., Lesh J. R., Sparks W. M., NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D.C., 1980, p. 135. (3.2б, 19.3, 19.7)

139. *Cox J. P.* Bull. Astron. Soc. India, **7**, 4, 1979. (1, 3.2б, 19.7)
140. *Cox J. P., Castor J. I., King D. S.* Astrophys. J., **172**, 423, 1972. (10.3)
141. *Cox J. P., Cox A. N., Eilers D. D., King D. S.* Доклад, представленный на 13th General Assembly of the IAU, Prague, Czechoslovakia, 1967. (11.1)
142. *Cox J. P., Cox A. N., Olsen K. H.* Astron. J., **68**, 276, 1963. (12.2)
143. *Cox J. P., Cox A. N.*, Olsen K. H., *King D. S., Eilers D. D.* Astrophys. J., **144**, 1038, 1966. (10.1, 12.2)
144. *Cox J. P., Davey W. R., Aizenman M. L.* Astrophys. J., **191**, 439, 1974. (9.3, 19.4)
145. *Cox J. P., Eilers D. D., King D. S.* Astron. J., **72**, 294, 1967. (11.1)
146. *Cox J. P., Giuli R. T.* Principles of Stellar Structure, Gordon and Breach, New York, 1968. (1, 2.1, 2.2, 4.1, 4.2б, 4.2в, 4.3, 5.2, 7.5, 8.3, 8.4, 8.6, 8.7, 8.12в, 9, 9.1, 9.3, 9.4, 10, 10.1, 10.3, 17.2, 17.9, 17.10, 17.12, 18.2а, 19, 19.3, 19.4, 19.6)
147. *Cox J. P., Hansen C. J. In* Proc. IAU Colloq. No. 53, White Dwarfs and Variable Degenerate Stars, eds. Van Horn H. M., Weidemann V., University of Rochester, New York, 1979. p. 392. (3, 3.2б, 10, 10.3, 18.3)
148. *Cox J. P., Hansen C. J., Davey W. R.* Astrophys. J., **182**, 885, 1973. (9.3, 19.4)
149. *Cox J. P., King D. S.* Не опубликовано, 1970. (11.4)
150. *Cox J. P., King D. S. In* Evolution of Population II Stars, ed. Philip A.G.D., Dudley Obs. Rep. No. 4, 1972, p. 103. (10.3)
151. *Cox J. P., King D. S., Stellingwerf R. F.* Astrophys. J., **171**, 93, 1972. (2.1, 3.2б, 3.3, 8.6)
152. *Cox J. P., Stellingwerf R. F.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **91**, 319, 1979. (10, 10.3, 19.7)
153. *Cox J. P., Whitney C. A.* Astrophys. J., **127**, 561, 1958. (10.2)
154. *Davey W. R.* Ph. D. Thesis, University of Colorado, 1970. (8.12б, 9.2б, 19.4)
155. *Davey W. R.* Astrophys. J., **179**, 235, 1973. (9.2б)
156. *Davey W. R.* Astrophys. J., **194**, 687, 1974. (9.3, 19.4)
157. *Davey W. R., Cox J. P.* Astrophys. J., **189**, 113, 1974. (19.4)
158. *Davidson A., Henry J. P., Middleditch J., Smith H. E.* Astrophys. J. (Letters), **177**, L97, 1972. (1)
159. *Davies G. F.* Austral. J. Phys., **21**, 294, 1968. (19.2)
160. *Davis C. G.* Astrophys. J., **187**, 175, 1974. (19.5)
161. *Davis C. G., Davison D. K.* Astrophys. J., **221**, 929, 1978. (12.2)
162. *Dedic H., Tassoul J.-L.* Astrophys. J., **188**, 173, 1974. (19.5)
163. *Dejouw R. J.* Astrophys. J., **182**, 215, 1973. (5.1, 18.2)
164. *Demaret J.* Astrophys. Space Sci., 31, 305, 1974. (5.4в, 19.4)
165. *Demaret J.* Astrophys. Space Sci., 33, 189, 1975. (19.4)
166. *Demaret J.* Astrophys. Space Sci., **45**, 31, 1976. (19.4)
167. *Demarque P. In* Proc. IAU Colloq. No. 21, Variable Stars in Globular Clusters and in Related Systems, ed. Fernie J. D., Reidel, Dordrecht, 1973, p. 187. (1)
168. *Detre L.*, ed., Nonperiodic Phenomena in Variable Stars, Reidel, Dordrecht, 1968. (1)
169. *Detweiler S. L.* Astrophys. J., **197**, 203, 1975. (19.5)
170. *Detweiler S. L.* Astrophys. J., **201**, 440, 1975. (19.5)
171. *Detweiler S. L., Ipser J. R.* Astrophys. J., **185**, 685, 1973. (19.5)
172. *Deubner F. L.* Solar Phys., **39**, 31, 1974. (18.3)
173. *Deupree R. G.* Ph. D. Dissertation, University of Toronto, 1974. (10.1, 17.7)
174. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **198**, 419, 1975. (10.1, 19.3)
175. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **201**, 183, 1975. (10.1, 19.3)
176. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **205**, 286, 1976. (10.1, 19.3)
177. *Deupree R. G. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 222. (10.1, 19.3)

178. *Deupree R. G. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 229. (10.1, 19.3)
179. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **211**, 509, 1977. (10.1, 11.4, 19.3)
180. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **214**, 502, 1977. (10.1, 19.3)
181. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **215**, 232, 1977. (10.1, 19.3)
182. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **215**, 620, 1977. (10.1, 19.3)
183. *Deutsch A. J. In* Handbuch der Physik, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 689. (1, 19.2)
184. *Dilke F. W. W., Gough D. O.* Nature, **240**, 262, 1972. (18.2, 18.2а)
185. *Duffey G. H.* Theoretical Physics: Classical and Modern Views, Houghton Mifflin Co., Boston, 1973. (4.2б)
186. *Duval P., Karp A. H.* Astrophys. J., **222**, 220, 1978. (3.4)
187. *Dziembowski W.* Acta Astron., **21**, 289, 1971. (17.5, 17.5б, 17.6б, 17.10, 18.3)
188. *Dziembowski W.* Mem. Soc. Roy. Sci. Liège, 6ᵉ ser., **8**, 287, 1975. (17.10, 18.3)
189. *Dziembowski W.* Acta Astron., **27**, 1, 1977. (18.3)
190. *Dziembowski W.* Acta Astron., **27**, 95, 1977. (17.10, 18.3, 19.7)
191. *Dziembowski W.* Acta Astron., **27**, 203, 1977. (3.4, 18.3)
192. *Dziembowski W. In* Proc. IAU Colloq. No. 53, White Dwarfs and Degenerate Variable Stars, eds. Van Horn H. M., Weidemann V., University of Rochester, New York, 1979, p. 359. (18.3)
193. *Eardley D. M., Press W. H.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **13**, 381, 1975. (1)
194. *Eckart C.* Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres, Pergamon Press, London, 1960. [Имеется перевод: Эккарт К., Гидродинамика океана и атмосферы. — М.: ИЛ, 1963.] (17.9, 17.10)
195. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **79**, 2, 1918. (1, 8)
196. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **79**, 177, 1918. (1, 8)
197. *Eddington A. S.* The Internal Constitution of the Stars, Cambridge University Press, Cambridge, 1926; повторное издание Dover paperback, 1959. (1, 2.1, 5.1, 9.4, 10.1, 10.2)
198. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **92**, 471, 1932. (19.7)
199. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **101**, 182, 1941. (10.2, 11.4)
200. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **102**, 154, 1942. (10.2, 11.4)
201. Eddy J. A., ed., The New Solar Physics, Westview, Boulder, 1978. (1)
202. Eggleton P., Mitton S., Whelan J., eds., Proc. IAU Symp. No. 73, Structure and Evolution of Close Binary Systems, Reidel, Dordrecht, Boston, 1976.
203. *Eisenfeld J.* J. Math. Annal. Appl., **26**, 357, 1969. (17.3)
204. *Epstein I.* Astrophys. J., **112**, 6, 1950. (8.13, 10.2, 17.13)
205. *Evans N. R.* Astrophys. J., **209**, 135, 1976. (3.3)
206. *Faulkner D. J.* Astrophys. J., **216**, 49, 1977. (3.2б)
207. *Faulkner D. J.* Astrophys. J., **218**, 209, 1977. (2.1, 3.2б, 8.6)
208. *Fernie J. D.* Astron. J., **72**, 1327, 1967. (3.1)
209. *Fernie J. D.* Astrophys. J., **151**, 197, 1968. (3.3)
210. *Fernie J. D.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **81**, 707, 1969. (3.1, 19.7)
211. Fernie J. D., ed., Proc. IAU Colloq. No. 21, Variable Stars in Globular Clusters and in Related Systems, Reidel, Dordrecht, 1973.
212. *Fernie J. D.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **88**, 116, 1976. (18.3)
213. Федорюк М. В., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — К.: Наукова думка, 1966. (18.3, 19.4)
214. Fischel D., Sparks W. M., eds., Cepheid Modeling, NASA Report SP-383, 1975. (1, 12.2)

215. Fischel D., Lesh J. R., Sparks W. M., eds., Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D.C., 1980. (1)
216. *Fishman G. J., Watts J. W. Jr., Derrickson J. H.* Astrophys. J. (Letters), **223**, L13, 1978. (1)
217. *Fitch W. S.* Astrophys. J., **161**, 669, 1970. (3.2б)
218. Fitch W. S., ed., Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, Reidel, Dordrecht, 1976. (1)
219. *Fitch W. S. In* Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 167. (18.3)
220. *Fitch W. S., Szeidl B.* Astrophys. J., **203**, 616, 1976. (3.2б)
221. *Forman W., Jones C. A., Liller W.* Astrophys. J. (Letters), **177**, L103, 1972. (1)
222. *Forsyth A. R.* A Treatise on Differential Equations, MacMillan, New York, 1929. (17.10)
223. *Fossat E., Ricort G., Aime C., Roddier F.* Astrophys. J. (Letters), **193**, L97, 1974. (18.3)
224. *Fraley G. S.* Astrophys. Space Sci., **2**, 96, 1968. (12.2, 19.3)
225. *Franklin P.* A Treatise on Advanced Calculus, John Wiley and Sons, 1940. [Имеется перевод: Франклин Ф., Математический анализ, части 1 и 2. — М.: ИЛ, 1950.] (9.2б)
226. *Fricke K.* Z. Astrophys., **68**, 317, 1968. (19.1а)
227. *Fricke K. J., Kippenhahn R.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 45, 1972. (19.1а)
228. *Gabriel M.* Astron. Astrophys., **1**, 321, 1969. (18.3)
229. *Gaposhkin S.* Smithsonian Astrophys. Obs. Spec. Rep., No. 310, 1972. (3.1)
230. *Gascoigne S. C. B.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **146**, 1, 1969. (3.1)
231. *Geyer V.* Astron. Astrophys., **5**, 116, 1970. (3.1)
232. *Gingold A. R., Faulkner D. J.* Astrophys. J., **188**, 145, 1974. (19.4)
233. *Ginzburg V. L., Zheleznyakov V. V.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **13**, 511, 1975. (1)
234. *Glasby J. S.* The Nebular Variables, Pergamon Press, New York and Oxford, 1975. (1)
235. *Goertzel G., Tralli N.* Some Mathematical Methods of Physics, McGraw-Hill, New York, 1960. (8.10, 17.3)
236. *Goldberg L., Aller L. H.* Atoms, Stars, and Nebulae, Blakiston, Philadelphia, 1943. (3.1)
237. *Goldreich P., Schubert G.* Astrophys. J., **150**, 571, 1967. (18.2, 19.1а)
238. *Goldstein H.* Classical Mechanics, Addison-Wesley Press, Cambridge, 1950. (5.4)
239. *Goossens M.* Astrophys. Space Sci., **16**, 386, 1972. (19.2)
240. *Goossens M.* Astrophys. Space Sci., **43**, 9, 1976. (19.2)
241. *Goossens M.* Astrophys. Space Sci., **44**, 397, 1976. (19.2)
242. *Goossens M., Smeyers P.* Astrophys. Space Sci., **26**, 137, 1974. (17.10, 17.13)
243. *Goossens M., Smeyers P., Denis J.* Astrophys. Space Sci., **39**, 257, 1976. (19.2)
244. *Gough D. O.* Astron. J., **72**, 799, 1967. (13, 19.3)
245. *Gough D. O. In* Proc. IAU Colloq. No. 38, Problems of Stellar Convection, eds. Spiegel E. A., Zahn J. P., Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1977, p. 15. (18.2a, 19.3)
246. *Gough D. O.* Astrophys. J., **214**, 196, 1977. (19.3)
247. *Gough D. O. In* The Solar Output and Its Variation, ed. White O. R., Colorado Associated University Press, Boulder, 1977, p. 451. [Имеется перевод: Поток энергии Солнца и его изменения/Под ред. О. Уайта. — М.: Мир, 1980, с. 481.] (1)
248. *Gursky H.* Annals New York Acad. Sci., **302**, 197, 1977. (1)
249. *Greenspan H. P.* The Theory of Rotating Fluids, Cambridge University Press, Cambridge, 1968. (1, 19.1а)

250. *Hanbury Brown R., Davis J., Allen L. R.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **137**, 375, 1967; **167**, 121 1974. (3.3)
251. Hansen C. J., ed., Physics of Dense Matter, Reidel, New York, 1973.
252. *Hansen C. J.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **16**, 15, 1978. (19.6)
253. *Hansen C. J. In* Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Lecture Notes in Physics, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin-Heidelberg — New York, 1980, p. 445. (3, 3.2a)
254. *Hansen C. J., Aizenman M. L., Ross R. R.* Astrophys. J., **207**, 736, 1976. (17.10)
255. *Hansen C. J., Cox J. P., Carrol B. W.* Astrophys. J., **226**, 210, 1978. (19.1г)
256. *Hansen C. J., Cox J. P., Herz M. A.* Astron. Astrophys., **19**, 144, 1972. (5.1)
257. *Hansen C. J., Cox J. P., Van Horn H. M.* Astrophys. J., **217**, 151, 1977. (19.1в, 19.2)
258. *Hansen C. J., Van Horn H. M.* Astrophys. J., **233**, 253, 1979. (17.4, 19)
259. *Härm R., Schwarzschild M.* Astrophys. J., **139**, 594, 1964. (19.4)
260. *Härm R., Schwarzschild M.* Astrophys. J., **172**, 403, 1972. (5.1)
261. *Harwit M.* Astrophysical Concepts, John Wiley, New York, 1973. (3)
262. *Heintzmann H., Hillebrandt W.* Astron. Astrophys., **28**, 51, 1975. (19.5)
263. *Henden A. A., Cox A. N. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 167. (19.3)
264. *Herbig G. H.* Adv. Astron. Astrophys., **1**, 47, 1962. (1, 3)
265. *Herbig G. H.* Astrophys. J., **217**, 693, 1978. (3)
266. *Herbst W., Hesser J. E., Ostriker J. P.* Astrophys. J., **193**, 679, 1974. (3.2a)
267. *Hewish A.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **8**, 265, 1970. (1, 3)
268. *Hill H. A. In* The New Solar Physics, ed. Eddy J. A., Westview, Boulder, Colorado, 1978, p. 135. (1, 8.4, 17.7, 19.7)
269. *Hill H. A., Caudell T. P., Rosenwald R. D.* Astrophys. J. (Letters), **213**, L81, 1977. (17.6)
270. Hill H. A., Dziembowski W., eds., Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proceedings of a Workshop, Lecture Notes in Physics, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980. (1, 8.4, 19.7)
271. *Hill H. A., Rosenwald R. D., Caudell T. P.* Astrophys. J., **225**, 304, 1977. (17.6б)
272. *Hill H. A., Stebbins R. T., Brown T. M. In* Proc. Fifth International Conf., Atomic Masses and Fundamental Constants, vol. 5, eds. Sanders J. H., Wapstra A. H., Plenum Press, New York, 1976, p. 622. (1)
273. *Hill S. J.* Ph. D. Thesis, University of Colorado, 1970. (3.3)
274. *Hill S. J., Willson L. A.* Astrophys. J., **229**, 1029, 1979. (10.2)
275. *Hillebrandt W., Steinmetz K. O.* Astron. Astrophys., **53**, 283, 1976. (19.5)
276. *Hiltner W. A., Mook D. E.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **8**, 139, 1970. (1)
277. *Hoffmeister C.* Veränderliche Sterne, under collaboration by Richter G. A., Wenzel W., Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1971. (1, 3)
278. *Hofmeister E.* Z. Astrophys., **65**, 194, 1967. (3.1)
279. *Hurley M., Roberts P. H., Wright K.* Astrophys. J., **143**, 535, 1966. (8.12в, 8.15, 17.7, 17.8)
280. *Iben I., Jr.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **83**, 697, 1971. (1)
281. *Iben I., Jr.* Astrophys. J., **166**, 131, 1971. (9.2a, 9.2б, 9.3, 11.4, 19.3)
282. *Ince E. L.* Ordinary Differential Equations, Dover Publications, New York, 1944. (8.5, 8.7 — 8.10, 17.9, 17.10)
283. *Ipser J. R., Thorne K. S.* Astrophys. J., **181**, 181, 1973. (19.5)
284. *Ishizuka T.* Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 495, 1967. (13)
285. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962. [Имеется перевод: Джэксон Дж., Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.] (17.3)

286. *James R. A.*, *Kahn F. D.* Astron. Astrophys., **12**, 332, 1971. (19.1a)
287. *Jeans J. H.* Astronomy and Cosmogony, Cambridge University Press, Cambridge, 1928; повторное издание Dover paperback, 1961. (13.1, 19.6)
288. *Jenkins F. A.*, *White H. E.* Fundamentals of Optics, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1957. (17.12)
289. *Joos G.* Theoretical Physics, Hafner Publ. Co., New York, 1932. (4.5)
290. *Kaniel S.*, *Kovetz A.* Phys. Fluids, **10**, 1186, 1967. (17.3)
291. *Karp A. H.* Astrophys. J., **201**, 641, 1975. (3.3, 3.4)
292. *Karp A. H. In* Cepheid Modeling, eds. Fischel D., Sparks W. M., NASA Report SP-383, NASA, Washington, D.C., 1975, p. 99. (11.4)
293. *Kato S.* Publ. Astron. Soc. Japan, **18**, 374, 1966. (18.2, 18.2a, 18.3)
294. *Kato S. In* Proc. IAU Colloq. No. **29**, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 33. (19.7)
295. *Kato S.*, *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 1, 1967. (19.4)
296. *Keeley D. A.* Astrophys. J., **161**, 643, 1970. (10.2)
297. *Keeley D. A.* Astrophys. J., **161**, 657, 1970. (10.2)
298. *Keller C. F.*, *Mutschlecner J. P.* Astrophys. J., **167**, 127, 1971. (11.4)
299. *King D. S.*, *Cox J. P.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **80**, 365, 1968. (1, 10.2, 11.1)
300. *King D. S.*, *Cox J. P.*, *Eilers D. D.*, *Davey W. R.* Astrophys. J., **182**, 859, 1973. (8.13, 10.1)
301. *King D. S.*, Hansen C. J., *Ross R. R.*, *Cox J. P.* Astrophys. J., **195**, 467, 1975. (3.26, 8.6)
302. *King D. S.*, *Wheeler J. C.*, *Cox J. P.*, *Hodson S. W.* Bull. Amer. Astron. Soc., **10**, 633, 1978. (9.2в)
303. *King D. S.*, *Wheeler J. C.*, *Cox J. P.*, *Cox A. N.*, *Hodson S. W. In* Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proceedings of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Lecture Notes in Physics, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 161. (9.2в)
304. *Kippenhahn R.* Z. Astrophys., **67**, 271, 1967. (19.6)
305. *Kippenhahn R. In* Proc. IAU Symp. No. 66, Late Stages of Stellar Evolution, ed. Tayler R. J., Reidel, Dordrecht, 1974, p. 20. (19.6)
306. Kippenhahn R., Rahe J., Strohmeier W. eds., Proc. IAU Colloq. No. 42, The Interaction of Variable Stars with Their Environment, Veröff. Remeis-Sternw. Bamberg, Astron. Inst. Univ. Erlangen-Nürnberg, **11**, Nr. 121, 1977. (1)
307. *Klebesadel R. W.*, *Strong I. B.* Astrophys. Space Sci., **42**, 3, 1976. (1)
308. *Kopal Z.* Astrophys. J., **109**, 509, 1949. (17.9)
309. *Korn G. A.*, *Korn T. M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1968. [Имеется перевод: Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.] (6.1)
310. *Kraft R. P.* Astrophys. J., **134**, 616, 1961. (3.1)
311. *Kraft R. P.* Astrophys. J., **135**, 408, 1962. (3.2a)
312. *Kraft R. P.* Adv. Astron. Astrophys., **2**, 43, 1963. (3.2a)
313. *Kruskal M.*, *Schwarzschild M.*, *Härm R.* Astrophys. J., **214**, 498, 1977. (18.2)
314. Крылов М. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. — К.: Изд. АН УССР, 1937. (19.4)
315. Пульсирующие звезды/Под ред. Б. В. Кукаркина. — М.: Наука, 1970. (1, 3)
316. Кукаркин Б. В., Холопов П. Н., Ефремов Ю. Н., Кукаркина Н. П., Курочкин Н. Е., Медведева Г. И., Перова Н. Б., Федорович В. П., Фролов М. С. Общий каталог переменных звезд, 3-е изд. — М.: Наука, 1969 — 1971. (1, 3.1)

317. Кукаркин Б. В., Холопов П. Н., Ефремов Ю. Н., Кукаркина Н. П., Курочкин Н. Е., Медведева Г. И., Перова Н. Б., Псковский Ю. П., Федорович В. П., Фролов М. С. Второе дополнение к Третьему изданию Общего каталога переменных звезд. — М.: Астрономический совет АН СССР, 1974. (3.1)
318. Кукаркин Б. В., Холопов П. Н., Федорович В. П., Фролов М. С., Кукаркина Н. П., Курочкин Н. Е., Медведева Г. И., Перова Н. Б., Псковский Ю. П. Третье дополнение к третьему изданию Общего каталога переменных звезд. — М.: Астрономический совет АН СССР, 1976. (3.1)
319. *Kukarkin B. V.*, *Parenago P. P. In* Basic Astronomical Data, ed. Strand K. A., University of Chicago Press, Chicago, 1963, p. 328. (1, 3)
320. *Kutter G. S.*, *Sparks W. M.* Astrophys. J., **175**, 407, 1972. (12.2)
321. *Lamb D. Q.* Astrophys. J. (Letters), **192**, L129, 1974. (3.2a)
322. *Lamb D. Q.*, *Sorvari J. M.* IAU Circular No. 2442, 1972. (1)
323. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1954. (4, 5.5)
324. *Langer G. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **155**, 199, 1971. (9.2a, 10.2)
325. Латышев И. Н. Астрофизика, **5**, 331, 1969. (3.1)
326. *Lebovitz N. R.* Astrophys. J., **142**, 229, 1965. (17.8)
327. *Lebovitz N. R.* Astrophys. J., **142**, 1257, 1965. (17.8)
328. *Lebovitz N. R.* Astrophys. J., **146**, 946, 1966. (17.8)
329. *Lebovitz N. R.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **5**, 465, 1967. (19.1a)
330. *Lebovitz N. R.* Astrophys. J., **160**, 701, 1970. (19.1a)
331. Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O., eds., Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, University of Chicago Press, Chicago and London, 1978.
332. *Ledoux P.* Astrophys. J., **102**, 143, 1945. (19.1a)
333. *Ledoux P.* Astrophys. J., **114**, 373, 1951. (19.1в)
334. *Ledoux P.* Ann. d'Astrophys., **18**, 232, 1955. (8.12в)
335. *Ledoux P. In* Handb. der Physik, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 605. (9.4, 19.4)
336. *Ledoux P. In* Star Evolution, ed. Gratton L., Academic Press, New York, 1963, p. 394. (1, 9.3, 13.1; 19.4)
337. *Ledoux P. In* Stellar Structure, eds. Aller L. H., McLaughlin D. B., University of Chicago Press, Chicago, 1965, p. 499. (1, 19.2)
338. *Ledoux P. In* Proc. IAU Symp. No. 59, Stellar Instability and Evolution, eds. Ledoux P., Noels A., Rodgers A. W., Reidel, Dordrecht, 1974, p. 135. (1, 17, 17.2, 17.8—17.10, 18.2, 18.2a)
339. *Ledoux P. In* Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, eds. Lebovitz N., Reid W. H., Vandervoort P. O., University of Chicago Press, Chicago and London, 1978, p. 15. (1, 17, 17.9, 17.10)
340. Ledoux P., Noels A., Rodgers A. W., eds., Proc. IAU Symp. No. 59, Stellar Instability and Evolution, Reidel, Dordrecht, 1974. (1)
341. *Ledoux P.*, *Pekeris C. L.* Astrophys. J., **94**, 124, 1941. (8.15)
342. *Ledoux P.*, *Renson R.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **4**, 293, 1966. (1, 3, 19.2)
343. *Ledoux P.*, *Simon R.*, *Bierlaire J.* Ann. d'Astrophys., **18**, 65, 1955. (8.15, 10.1, 10.2)
344. *Ledoux P.*, *Smeyers P.* C.R. Acad. Sci. Paris, **262**, 841, 1966. (17.8, 17.9)
345. *Ledoux P.*, *Walraven Th. In* Handbuch der Physik, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 353. (1, 2.1, 3, 4, 4.2a — 4.2в, 5.1, 7.6, 8.4, 8.5, 8.9 — 8.11, 8.12в, 8.15, 9.2б, 12.1, 12.3, 16.2, 17.1, 17.5, 17.6б, 17.7 — 17.9, 17.11, 18.3, 19, 19.1a — 19.1в, 19.2)
346. *Ledoux P.*, *Whitney C. A. In* Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres, ed. Thomas R. N., Nuovo Cimento, **22**, Ser. X, Suppl. No. 1, 1961, p. 131. [Имеется пе-

ревод: Космическая газодинамика/Под ред. Р. Томаса. — М.: Мир, 1964, с. 206.] (1, 9.2а)
347. *Leighton R. B., Noyes R. W., Simon G. W.* Astrophys. J., **135**, 474, 1962. (18.3)
348. *Lewin W. H. G.* Ann. N. Y. Acad. Sci., **302**, 210, 1977. (1)
349. *Lewin W. H. G., Hoffman J. H., Doty J., Clark G. W., Swank J. H., Becker R. H., Pravdo S. H., Serlemitsos P. J.* Nature, **267**, 28, 1977. (1)
350. *Lewin W. H. G., van Paradijs J.* Sky and Telescope, **57**, 446, 1979. (1)
351. *Lighthill J.* Waves in Fluids, Cambridge University Press, London, 1978. [Имеется перевод: Лайтхилл Дж., Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.] (1)
352. *Love A. E. H.* Phil. Mag., Ser. 5, **27**, 254, 1889. (19.1а)
353. *Lovell A. B. C.* Quart. J. Roy. Astron. Soc., **12**, 98, 1971. (3)
354. *Lucy L.* Astrophys. J., **206**, 499, 1976. (18.3, 19.7)
355. Luyten W. J., ed., Proc. IAU Symp. No. 42, White Dwarfs, Reidel, Dordrecht, 1971. [Имеется перевод: Белые карлики: Сб. статей. — М.:Мир, 1975.]
356. *Lynden-Bell D., Ostriker J. P.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **136**, 293, 1967. (5.3, 8.10, 9.3, 15.2, 15.3, 19.1а, 19.1б)
357. *Maeder A., Rufener F.* Astron. Astrophys., **20**, 437, 1972. (18.3)
358. *Main I. G.* Vibrations and Waves in Physics, Cambridge University Press, London, 1978. (1)
359. Макаренко Е. Н. Астрон. цирк., № 673, с. 7, 1972. (3.1)
360. *Markey P., Tayler R. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **163**, 77, 1973. (19.2)
361. *Markey P., Tayler R. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **168**, 505, 1974. (19.2)
362. *McConnell A. J.* Applications of the Absolute Differential Calculus, Blackie and Sons Ltd., London, 1931. (4.1)
363. *McGraw J. T.* Ph. D. Dissertation, University of Texas, 1977. (1, 3, 3.2а, 18.3, 19.7)
364. *McGraw J. T., Robinson E. L.* Astrophys. J. (Letters), **200**, L89, 1975. (3.2а)
365. *McGraw J. T., Robinson E. L.* Astrophys. J. (Letters), **205**, L155, 1976. (3.2а, 18.3)
366. *McNamara D. H., Feltz K. A. Jr.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **90**, 275, 1978. (3)
367. *Meltzer D. W., Thorne K. S.* Astrophys. J., **145**, 514, 1966. (8.5)
368. *Melvin P. J.* Не опубликовано, 1975. (13.4)
369. *Melvin P. J.* SIAM J. Appl. Math., **33**, 161, 1977. (12.3)
370. *Mestel L. In* Stellar Structure, eds. Aller L. H., McLaughlin D. B., University of Chicago Press, Chicago, 1965, p. 465. [Имеется перевод: Внутреннее строение звезд/Под ред. Л. Аллера и Д. Мак-Лафлина. — М.: Мир, 1970, с. 249.] (19.1а)
371. *Mestel L. In* Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, eds. Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O., University of Chicago Press, Chicago, 1978, p. 69. (19.2)
372. *Mihalas D.* Stellar Atmospheres, 2nd ed., W. H. Freeman, San Francisco, 1978. [Имеется перевод: Михалас Д., Звездные атмосферы. — М.: Мир, 1982.] (3.4, 9.2)
373. *Mihalas D., Kunasz P. B., Hummer D. G.* Astrophys. J., **203**, 265, 1975. (3.4)
374. *Milne-Thomson L. M.* Theoretical Hydrodynamics, 4th ed., MacMillan, New York, 1960. [Имеется перевод: Милн-Томсон Л., Теоретическая гидродинамика. — М.: Мир, 1964.] (4, 4.2а, 4.2б)
375. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* Gravitation, W. H. Freeman, San Francisco, 1973. [Имеется перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, в 3-х томах. — М.: Мир, 1977.] (1, 4, 19.5)
376. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. — М.: Наука, 1964. (19.4)
377. *Mohan C.* Publ. Astron. Soc. Japan, **24**, 133, 1972. (12.3)
378. *Monaghan J. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **131**, 105, 1965. (19.2)
379. *Monaghan J. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **132**, 1, 1966. (19.2)

380. *Monaghan J. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **134**, 275, 1966. (19.2)
381. *Monaghan J. J.* Z. Astrophys., **68**, 461, 1968. (19.2)
382. *Monaghan J. J.* Z. Astrophys., **69**, 146, 1968. (19.2)
383. *Monaghan J. J.* Z. Astrophys., **69**, 154, 1968. (19.2)
384. *Monaghan J. J., Robson K. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **155**, 231, 1971. (19.2)
385. *Moore D. W., Spiegel E. A.* Astrophys. J., **143**, 871, 1966. (13, 18.3)
386. *Morse P. M.* Vibration and Sound, McGraw-Hill, New York, 1936. (1)
387. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953. (4.2б, 6.1)
388. *Mumford G. S.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **79**, 283, 1967. (1)
389. *Murphy J. O.* Australian J. Phys., **21**, 465, 1968. (12.3)
390. *Murphy J. O., Smith A. O.* Proc. Astron. Soc. Australia, **1**, 328, 1970. (12.3)
391. *Musman S., Rust D. M.* Solar Phys., **13**, 261, 1970. (18.3)
392. *Nather R. E.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **90**, 477, 1978. (1, 3, 3.1, 3.2a, 18.3, 19.7)
393. *Ni W. T.* Astrophys. J., **181**, 939, 1973. (19.5)
394. *Nikolov N., Tsvetkov T.* Astrophys. Space Sci., **16**, 445, 1972. (3.1)
395. *Noels A., Boury A., Scuflaire R., Gabriel M.* Astron. Astrophys., **31**, 185, 1974. (7.6, 17.10)
396. *Nordlund A.* Astron. Astrophys., **32**, 407, 1974. (19.3)
397. *Nordlund A.* Astron. Astrophys., **50**, 23, 1976. (19.3)
398. *Okamoto I.* Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 384, 1967. (19.4)
399. *Okamoto I., Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 154, 1967. (13)
400. *Oke J. B.* Astrophys. J., **133**, 90, 1961. (3.3)
401. *Oke J. B.* Astrophys. J., **134**, 214, 1961. (3.3)
402. *Oke J. B., Searle L.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **12**, 315, 1974. (1)
403. *Öpik E. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **111**, 278, 1951. (19.1a)
404. *Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **18**, 7, 1966. (19.1a)
405. *Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **23**, 405, 1971. (3.4)
406. *Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **24**, 509, 1972. (19.1a)
407. *Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **27**, 237, 1975. (17.9 — 17.11, 17.14, 18.2, 18.2a)
408. *Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **28**, 105, 1976. (17.10, 17.14)
409. *Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **29**, 235, 1977. (17.10, 18.3, 19.7)
410. *Osaki Y., Hansen C. J.* Astrophys. J., **185**, 277, 1973. (3.2a, 17.5, 19.5)
411. *Osaki Y., Hansen C. J.* Astron. Astrophys., **23**, 475, 1973. (5.1)
412. *Ostriker J. P.* Annals N. Y. Acad. Sci., **302**, 229, 1977. (1)
413. *Ostriker J. P. In* Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, eds. Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O., University of Chicago Press, Chicago and London, 1978, p. 59. (19.1)
414. *Owen J. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **177**, 384, 1957. (17.9)
415. Papagiannis M. D., ed., Eighth Texas Symposium on Relativistic Astorphysics, Annals New York Acad. Sci., **302**, 1977.
416. *Papaloizou J. C. B.* Mon. Non. Roy. Astron. Soc., **162**, 143, 1973. (12.3)
417. *Papaloizou J. C. B.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **162**, 169, 1973. (12.2)
418. *Papaloizou J. C. B., Pringle J. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **182**, 423, 1978. (17.3, 19.1a)
419. *Parsons S. B.* Astrophys. J. Suppl., **18**, 127, 1969. (19.3)
420. *Parsons S. B.* Astrophys. J., **164**, 355, 1971. (3.3, 3.4)
421. *Parsons S. B.* Astrophys. J., **174**, 57, 1972. (3.3, 3.4)
422. *Parsons S. B., Bouw G. D.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **153**, 133, 1971. (3.3)
423. *Patterson J., Robinson E. L., Nather R. E.* Astrophys. J., **214**, 144, 1977. (3, 3.2a, 19.7)

424. *Payne-Gaposchkin C. In* Astrophysics: A Topical Symposium, ed. Hynek J. A., McGraw-Hill, New York, 1951, p. 495. (1, 3, 3.1)
425. *Payne-Gaposchkin C.* Variable Stars and Galactic Structure, Athlone Press, London, 1954. (1,3)
426. *Payne-Gaposchkin C.* The Galactic Novae, North Holland, Amsterdam, 1957. (1)
427. *Payne-Gaposchkin C.* Vistas in Astron., **4**, 184, 1961. (3.1)
428. *Payne-Gaposchkin C., Gaposchkin S. In* Basic Astronomical Data, ed. Strand K. A., University of Chicago Press, Chicago, 1963, p. 448. (3, 3.1)
429. *Payne-Gaposchkin C., Gaposchkin S.* Smithsonian Astrophys. Obs. Rep., No. 9, 1965. (3.1, 13.3)
430. *Payne-Gaposchkin C., Gaposchkin S.* Vistas in Astron., **8**, 191, 1966. (3.1)
431. *Payne-Gaposchkin C., Haramundanis K.* Introduction to Astronomy, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970. (3.1)
432. *Pekeris C. L.* Astrophys. J., **88**, 189, 1938. (17.7, 17.8)
433. *Pel J. W.* Astron. Astrophys., **62**, 75, 1978. (3, 3.1)
434. *Penrose R.* Scientific American, **226**, No. 5, 38, 1972. (1)
435. *Percy J. R.* Scientific American, **232**, No. 6, 66, 1975. (1)
436. *Perdang J.* Astrophys. Space Sci., **1**, 355, 1968. (17.3)
437. *Perry J. J., Burbidge E. M., Burbidge G. R.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **90**, 337, 1978. (1)
438. *Petersen J. O.* Astron. Astrophys., **27**, 89, 1973. (3.2б)
439. *Petersen J. O.* Astron. Astrophys., **34**, 309, 1974. (3.2б)
440. *Petersen J. O.* Mem. Soc. Roy. Sci. Liège, 6[e] ser., **8**, 299, 1975. (8.13)
441. *Petersen J. O. In* Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 195. (3, 3.1)
442. *Petersen J. O.* Astron. Astrophys., **62**, 205, 1978. (3.2б)
443. Philip A. G. D., ed., The Evolution of Population II Stars, Dudley Observatory Report, No. 4, 1972. (1)
444. *Phillips H. B.* Vector Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1933. (4.2б, 4.2в, 17.3)
445. *Pickering E. C.* Harvard Circ., No. 173, 1912. (3.1)
446. *Pollack J., Hansen C. J.* Не опубликовано, 1970. (8.12в)
447. *Price R., Thorne K. S.* Astrophys. J., **155**, 163, 1969. (19.5)
448. *Rabinowitz I.* Astrophys. J., **126**, 386, 1957. (10.1, 10.2)
449. *Ralston A.* A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1965. (8.12б)
450. *Rhodes E. J., Ulrich R. K., Simon G. W.* Astrophys. J., **218**, 901, 1977. (18.3)
451. *Richer H. B., Ulrych T. J.* Astrophys. J., **192**, 719, 1974. (3.2а)
452. *Richtmyer R. D., Morton K. W.* Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd ed., Interscience, New York, 1967. [Имеется перевод: Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.] (12.2)
453. *Robe H.* Bull Acad. Roy. Belge, Cl. 5c, 5[e] series, 51, 595, 1965. (17.7)
454. *Robe H.* Ann. d'Astrophys., **31**, 475, 1968. (17.8 — 17.10)
455. *Robinson E. L.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **14**, 119, 1976. (1, 3, 19.7)
456. *Robinson E. L., McGraw J. T.* Astrophys. J. (Letters), **207**, L37, 1976. (1, 3.2а, 19.7)
457. *Robinson E. L., McGraw J. T. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 98. (1, 3.2а, 19.7)
458. *Robinson E. L., Nather R. E., McGraw J. T.* Astrophys. J., **210**, 211, 1976. (1, 3.2а, 19.7)
459. *Rodgers A. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **117**, 85, 1957. (3.3)
460. *Rodgers A. W., Gingold A. R.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **161**, 23, 1973. (3.2б)

461. *Rojansky V.* Introductory Quantum Mechanics, Prentice-Hall, New York, 1938. (17.3)
462. *Rose W.* Astrophysics, Rinehart and Winston, New York, 1973. (3)
463. *Rosenbluth M. N., Bahcall J. N.* Astrophys. J., **184**, 9, 1973. (19.6)
464. *Rosendahl J. D., Snowden M. S.* Astrophys. J., **169**, 281, 1971. (18.3)
465. *Rosseland S.* The Pulsation Theory of Variable Stars, Clarendon Press, Oxford, 1949; повторное издание, 1964. [Имеется перевод: Росселанд С. Теория пульсаций переменных звезд. — М.: ИЛ, 1952.] (1, 4, 5.2, 8.12а, 8.15, 9.2б, 11.1, 12.3, 19.4)
466. *Rosseland S., Randers G.* Astrophys. Norvegica, **3**, 71, 1938. (7.6)
467. *Roxburgh I. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **126**, 67, 1963. (19.2)
468. *Roxburgh I. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **132**, 207, 1966. (19.2)
469. *Roxburgh I. W. In* Stellar Rotation, ed. Slettebak A., Reidel, Dordrecht, 1970, p. 9. (19.1a)
470. *Rudd T. J., Rosenberg R. M.* Astron. Astrophys., **6**, 193, 1970. (13, 13.2, 13.4)
471. *Ruderman M.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 427, 1972. (1, 3)
472. *Ruderman M.* Ann. New York Acad. Sci., **262**, 159, 1975. (1)
473. *Ruffini R., Wheeler J. A.* Phys. Today, **24**, No. 1, 30, 1971. (1)
474. *Saio H., Cox J. P. In* Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Lecture Notes in Physics, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 169. (10, 19.7)
475. *Saio H., Cox J. P.* Astrophys. J., **236**, 549, 1980. (18.1, 18.3)
476. *Saio H., Cox J. P., Hansen C. J., Carroll B. W. In* Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Lecture Notes in Physics, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 135. (19.1г)
477. *Saio H., Kobayashi E., Takeuti M.* Sci. Rep. Tohoku University, **51**, 144, 1977. (3.2б, 19.3)
478. *Sandage A. R.* Quart. J. Roy. Astron. Soc., **13**, 202, 1972. (3.1)
479. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **151**, 531, 1968. (3.1)
480. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **157**, 683, 1969. (3.1)
481. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **167**, 293, 1971. (3.1)
482. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **194**, 559, 1974. (3.1)
483. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J. (Letters), **207**, L1, 1976. (3.1)
484. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **210**, 7, 1976. (3.1)
485. Sanders J. H., Wapstra A. H., eds., Proc. of the Fifth International Conference, Atomic Masses and Fundamental Constants, vol. 5, Plenum Press, New York, 1976. (1)
486. *Sargent W. L. W.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **2**, 297, 1964. (1, 19.2)
487. *Sastri V. K., Simon N. R.* Astrophys. J., **186**, 997, 1973. (19.4)
488. *Sauvenier-Goffin E.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **20**, 20; 1951. (17.7, 17.9)
489. *Schaltenbrand R., Tammann G. A.* Astron. Astrophys., **7**, 289, 1970. (3.1)
490. *Schatzman E.* Ann. d'Astrophys., **16**, 162, 1953. (7.6)
491. *Schatzman E.* Ann. d'Astrophys., **19**, 45, 1956. (8.4)
492. *Schiff L.* Quantum Mechanics, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1955. [Имеется перевод: Шифф Л., Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1957 (1-е изд.), 1959 (2-е изд.).] (15.2)
493. *Schmidt E. G.* Astrophys. J., **165**, 335, 1971. (3.3)
494. *Schmidt E. G.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **167**, 613, 1974. (3.2б)
495. *Schutz B. F.* Astrophys. J., **232**, 874, 1979. (19.1б)
496. *Schutz B. F. Jr.* Astrophys. J. Suppl., **24**, 319, 1972. (19.5)
497. *Schwank D. C.* Не опубликовано, 1975. (17.8)
498. *Schwank D. C.* Astrophys. Space Sci., **43**, 459, 1976. (17.8, 17.13)

499. *Schwarzschild K.* Nachr. Gesellwiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, **1**, 41, 1906. (17.2, 18.2)
500. *Schwarzschild M.* Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, Princeton, 1958. [Имеется перевод: Шварцшильд М. Строение и эволюция звезд. — М.: ИЛ, 1961.] (7.5, 8.12а, 19.1а)
501. *Schwarzschild M.* Astrophys. J., **195**, 137, 1975. (18.3)
502. *Scuflaire R.* Astron. Astrophys., **34**, 449, 1974. (17.8 — 17.10)
503. *Scuflaire R.* Astron. Astrophys., **36**, 107, 1974. (17.9 — 17.11)
504. *Serkowski K.* Astrophys. J., **160**, 1107, 1970. (18.3)
505. *Shapley H.* Astrophys. J., **40**, 448, 1914. (1)
506. *Shawl S. J.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **86**, 843, 1974. (18.3)
507. *Shibahashi H.* Publ. Astron. Soc. Japan, **31**, 87, 1979. (Предисловие, 111, 17, 17.9, 17.10, 17.12, 18, 18.3)
508. *Shibahashi H., Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **28**, 199, 1976. (17.10, 17.11, 17.14, 18.3)
509. *Shibahashi H., Osaki Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **28**, 533, 1976. (17.10, 17.14, 18.2, 18.3)
510. Шкловский И. С. Сверхновые звезды. — М.: Наука, 1966. (1)
511. *Sienkiewicz R., Dziembowski W.* Nonstationary Evolution of Close Binaries, ed. Żytkow A. N., Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1978, p. 169. (18.3)
512. *Simon N. R.* Astrophys. J., **159**, 859, 1970. (12.3, 19.4)
513. *Simon N. R.* Astrophys. J., **164**, 331, 1971. (12.3, 19.4)
514. *Simon N. R.* Astron. Astrophys. J., **21**, 45, 1972. (12.3)
515. *Simon N. R.* Astron. Astrophys. J., **21**, 51, 1972. (12.3)
516. *Simon N. R.* Bull. Amer. Astron. Soc., 6, 469, 1974. (19.4)
517. *Simon N. R. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 173. (12.3)
518. *Simon N. R.* Astrophys. Space Sci., **51**, 205, 1977. (19.4)
519. *Simon N. R.* Astron. Astrophys., **75**, 140, 1979. (3.2б)
520. *Simon N. R., Sastri V. K.* Astron. Astrophys., **21**, 39, 1972. (12.3, 19.4)
521. *Simon R.* Astron. Astrophys., **2**, 390, 1969. (17.3, 19.1в)
522. Slettebak A., ed., Stellar Rotation, Gordon and Breach, New York, 1970. (19.1а)
523. *Smeyers P.* Acad. Roy. des Sci., des Lett. et des Beaux-Arts d. Belgique, 5[e] Ser., **52**, 1126, 1966. (17.6а, 17.7, 17.8)
524. *Smeyers P.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **36**, 357, 1967. (17.5, 17.5а, 17.8)
525. *Smeyers P.* Researche Astron., **8**, 359, 1973. (15.3)
526. *Smeyers P. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 140. (19.2)
527. *Smeyers P., Denis J.* Astron. Astrophys., **14**, 311, 1971. (19.1в)
528. *Smith E. V. P., Jacobs K. C.* Introductory Astronomy and Astrophysics, W. B. Saunders, Philadelphia, 1973. (3)
529. *Smith F. G.* Pulsars, Cambridge University Press, Cambridge, 1977. [Имеется перевод: Смит Ф. Г. Пульсары. — М.: Мир, 1979.]
530. *Smith H. E.* Mercury, **7**, 27, 1978. (1)
531. *Smith M. A.* Astrophys. J., **215**, 574, 1977. (1, 3.2в, 3.4, 19.7)
532. *Smith M. A.* Astrophys. J., **224**, 927, 1978. (1, 3.2в, 3.4)
533. *Smith M. A. In* Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 60. (1, 3.2в, 19.7)
534. *Smith M. A. In* Highlights of Astronomy, vol. 5, ed. Wayman P. A., Reidel, Dordrecht, 1980, p. 457. (1, 3.2в)

535. *Smith M. A., Africano S., Worden S. P.* Preprint, 1979. (3.2в, 3.4)
536. *Smith M. A., Buta R.* Astrophys. J. (Letters), **232**, L193, 1979. (3.2в, 8.4, 19.7)
537. *Smith M. A., McCall M. L.* Astrophys. J., **223**, 221, 1978. (1, 3.2в, 3.4, 19.7)
538. *Sobouti Y.* Astron. Astrophys., **55**, 327, 1977. (17.8, 17.12)
539. *Spiegel E. A.* Astrophys. J., **138**, 216, 1963. (19.3)
540. *Spiegel E. A.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **9**, 323, 1971. (19.3)
541. *Spiegel E. A.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 261, 1972. (19.3)
542. *Spiegel E. A., Veronis G.* Astrophys. J., **131**, 442, 1960. (18.2)
543. Stein R. F., Cameron A. G. W., eds., Stellar Evolution, Plenum Press, New York, 1966.
544. *Stein R. F., Leibacher J.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **12**, 407, 1974. (18.3)
545. *Stellingwerf R. F.* Astron. Astrophys., **21**, 91, 1972. (13, 13.3)
546. *Stellingwerf R. F.* Ph. D. Dissertation, University of Colorado, 1974. (5.1, 12.2, 13.4)
547. *Stellingwerf R. F.* Astrophys. J., **192**, 139, 1974. (12.2, 13.4)
548. *Stellingwerf R. F.* Astrophys. J., **195**, 441, 1975. (12.2)
549. *Stellingwerf R. F.* Astron. J., **83**, 1184, 1978. (10, 10.1, 13.3, 19.7)
550. *Stellingwerf R. F.* Astrophys. J., **227**, 935, 1979. (10, 10.1, 13.1, 13.3)
551. *Stiening R. F., Hildebrand R. H., Spillar E. J.* Astrophys. J., **248**, 268, 1981. (3, 3.2a, 19.7)
552. *Stobie R. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **144**, 461, 1969. (12.2)
553. *Stobie R. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **144**, 485, 1969. (12.2)
554. *Stobie R. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **144**, 511, 1969. (12.2)
555. *Stobie R. S.* Observatory, **90**, 20, 1970. (3.2б)
556. *Stobie R. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **157**, 167, 1972. (3.2б)
557. *Stobie R. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **189**, 631, 1977. (3.2б)
558. *Stobie R. S., Hawardin T.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **157**, 157, 1972. (3.2б)
559. *Stothers R., Frogel J. A.* Astrophys. J., **148**, 305, 1967. (8.11, 8.12в)
560. *Strittmatter P. A.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **7**, 665, 1969. (19.1a)
561. *Strohmeier W., Knigge R.* Die Dr. Remeis-Sternwarte Bamberg und die "Veränderliche Sterne" als die Objekte ihrer Forschung, Remeis-Sternwarte, Bamberg, 1972. (1, 3)
562. *Strong I., Klebesadel R. W., Evans W. D.* Annals New York Acad. Sci., **262**, 145, 1975. (1)
563. *Sweet P. A.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **110**, 548, 1950. (19.1a)
564. *Swihart T. L.* Astrophysics and Stellar Astronomy, Wiley, New York, 1968. (3)
565. *Tassoul J.-L.* The Theory of Rotating Stars, Princeton University Press, Princeton, 1979. [Имеется перевод: Тассуль Ж.-Л., Теория вращающихся звезд. — М.: Мир, 1982.] (19.1)
566. *Tayler R. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **161**, 365, 1973. (19.2)
567. *Tayler R. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **162**, 17, 1973. (19.2)
568. *Tayler J. H., Huguenin G. R.* Astrophys. J., **167**, 273, 1971. (2.1)
569. *Taylor J. H., Manchester R. N.* Pulsars, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1977. [Имеется перевод: Манчестер Р., Тейлор Дж. Пульсары. — М.: Мир, 1980.] (1)
570. *Temple G., Bickley W. G.* Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering, Dover, New York, 1956. (8.11)
571. *Thomas L. H.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **91**, 619, 1931. (19.4)
572. *Thomson W.* Phil. Trans. Roy. Soc. London, **153**, 603, 1863. (17.7)
573. *Thorne K. S. In* High-Energy Astrophysics, vol. 3, eds. DeWitt C., Schatzman E., Veron P. (Les Houches Summer School of Theoretical Physics, 1966), Gordon and Breach, New York, 1967, p. 259. (1, 4.2a, 19.5)
574. *Thorne K. S.* Astrophys. J., **149**, 591, 1967. (19.5)

575. *Thorne K. S.* Astrophys. J., **158**, 1, 1969. (19.5)
576. *Thorne K. S.* Astrophys. J., **158**, 997, 1969. (19.5)
577. *Thorne K. S.* Astrophys. J., **212**, 825, 1977. (19.5)
578. *Thorne K. S. In* Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, eds. Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O., University of Chicago Press, Chicago and London, 1978, p. 149. (19.5)
579. *Thorne K. S.*, Żytkow A. N. Astrophys. J., **212**, 832, 1977. (19.5)
580. *Tolstoy I.* Rev. Mod. Phys., **35**, 207, 1963. (17.2, 17.9, 17.10)
581. *Tolstoy I.* Wave Propagation, McGraw-Hill, New York, 1973. (1, 5.4б, 17.2, 17.9, 17.10)
582. *Tuggle R. S.*, *Iben I. Jr.* Astrophys. J., **186**, 593, 1973. (10.3, 19.3)
583. *Ulrich R. K.* Astrophys. Space Sci., **7**, 71, 1970. (19.3)
584. *Ulrich R. K.* Astrophys. Space Sci., **7**, 183, 1970. (19.3)
585. *Ulrich R. K.* Astrophys. Space Sci., **9**, 80, 1970. (19.3)
586. *Ulrich R. K.* Astrophys. J., **172**, 165, 1972. (18.2a)
587. *Ulrich R. K.* Astrophys. J., **207**, 564, 1976. (19.3)
588. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **17**, 205, 1965. (4.3, 7.5, 8.3, 8.4, 9.2a, 18.3)
589. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 140, 1967. (13, 19.3, 19.4)
590. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **20**, 356, 1968. (19.4)
591. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **27**, 81, 1975. (17.10)
592. *Unno W.*, *Kamijo F.* Publ. Astron. Soc. Japan, **18**, 23, 1966. (13)
593. *Unno W.*, *Osaki Y.*, *Ando H.*, *Shibahashi H.* Nonradial Oscillations of Stars, Tokyo University Press, Tokyo, 1979. (Предисловие, 1, II1, 17, 17.6б, 17.10, 17.11, 17.14, 18.3)
594. *Unno W.*, *Spiegel E. A.* Publ. Astron. Soc. Japan, **18**, 85, 1966. (18.3)
595. *Unsöld A.* The New Cosmos, 2nd ed., Springer-Verlag, West Berlin, 1977. (3)
596. *Usher P. D.*, *Whitney C. A.* Astrophys. J., **154**, 203, 1968. (13, 13.2, 13.4)
597. *van der Borght R.* Proc. Astron. Soc. Australia, 1, 87, 1968. (12.3)
598. *van der Borght R.* Austral. J. Phys., **22**, 497, 1969. (12.3)
599. *van der Borght R.* Proc. Astron. Soc. Australia, **1**, 325, 1970. (12.3)
600. *van der Borght R.*, *Murphy J. O.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **131**, 225, 1966. (12.3)
601. *van Genderin A. M.* Astron. Astrophys., **7**, 244, 1970. (3.1)
602. *Van Horn H. M. In* Proc. IAU Symp. No. 53, Physics of Dense Matter, ed. Hansen C. J., Reidel, Dordrecht, 1974, p. 251. (19.1a)
603. *Van Horn H. M. In* Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 259. (18.3)
604. *Van Horn H. M. In* Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, eds. Fishel D., Lesh J. R., Sparks W. M., NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D.C., 1980, p. 453. (3, 3.2a, 18.3)
605. *Van Horn H. M.*, *Savedoff M. P. In* Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 109. (19)
606. *Van Horn H. M.*, *Wesemael F.*, *Winget D. E.* Astrophys. J. (Letters), **253**, L143, 1980. (19.7)
607. *Vauclair G. In* Proc. IAU Symp. No. 42, White Dwarfs, ed. Luyten W. J., Reidel, Dordrecht, 1971, p. 145. (18.3)
608. *Vaughan G. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **159**, 375, 1972. (8.12a)
609. *Vemury S. K.* Astrophys. J., **221**, 258, 1978. (19.4)
610. *Vitense E.* Z. Astrophys., **32**, 135, 1953. (19.3)
611. *von Sengbusch K.* Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft, No. 32, p. 228, 1973. (12.2)
612. *von Zeipel H.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **84**, 665, 1924. (19.1a)

613. *Wagoner R. V.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **7**, 553, 1969. (1)
614. *Warner B. In* Proc. IAU Symp. No. 73, Structure and Evolution of Close Binary Systems, eds. Eggleton P., Mitton S., Whelan J., Reidel, Dordrecht — Boston, 1976, p. 85. (1, 3, 3.2a)
615. *Warner B. In* Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 247. (3, 3.2a)
616. *Warner B., Brickhill A. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **164**, 673, 1974. (3.2a)
617. *Warner B., Robinson E. L.* Nature Phys. Sci., **239**, 2, 1972. (3, 3.2a)
618. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Appliations of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 1972. [Имеется перевод: Вейнберг С., Гравитация и космология: принципы и приложения общей теории относительности. — М.: Мир, 1975.] (19.5)
619. *Wesselink A. J.* Bull. Astron. Inst. Netherlands, **10**, 91, 1946. (3.3)
620. *Wesselink A. J.* Bull. Astron. Inst. Netherlands, **10**, 252, 1947. (3.3)
621. White O. R., ed., The Solar Output and Its Variation, Colorado Associated University Press, Boulder, 1977. [Имеется перевод: Поток энергии Солнца и его изменения/Под ред. О. Уайта. — М.: Мир, 1980.] (1)
622. *Will C. M.* Astrophys. J., **190**, 403, 1974. (19.5)
623. *Wilson O. C., Bappu M. K. V.* Astrophys. J., **125**, 661, 1957. (18.3)
624. *Wolff S. C. In* Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 43. (19.2)
625. *Wolff C. L.* Astrophys. J., **216**, 784, 1977. (19.1в)
626. *Wolff C. L.* Astrophys. J., **227**, 943, 1979. (Предисловие, III, 17, 17.9 — 17.11, 18, 18.2, 18.3)
627. *Wood P. R.* Ph. D. Dissertation, Australian National University, 1973. (19.3)
628. *Wood P. R.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **174**, 531, 1976. (9.2в)
629. *Woolley R. v. d. R., Stibbs D. W. N.* The Outer Layers of a Star, Clarendon Press, Oxford, 1953. (3.4, 9.2a)
630. *Wright G. A. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **146**, 197, 1969. (19.2)
631. *Wright G. A. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **162**, 339, 1973. (19.2)
632. *Weubel M. In* Handbuch der Physik, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 38. (19.1a)
633. *Zahn J. P.* Astrophys. Letters, **1**, 209, 1968. (13)
634. Zahn J. P., *Spiegel E. A.*, eds., Proceedings of the IAU Colloq. No. 38, Problems of Stellar Convection, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1977.
635. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. — М.: Наука, 1967. (1, 19.5)
636. Жевакин С. А. Астрон. ж., **30**, 161, 1953. (10.2)
637. Жевакин С. А. Астрон. ж., **31**, 141, 1954. (10.2)
638. Жевакин С. А. Астрон. ж., **31**, 335, 1954. (10.2)
639. *Zhevakin S. A.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., I, 367, 1963. (1)
640. *Ziebarth K.* Ph. D. Dissertation, University of Colorado, 1970. (9.2б)
641. *Ziebarth K.* Astrophys. J., **162**, 947, 1970. (9.2б)
642. Żytkow A. N., ed., Nonstationary Evolution of Close Binaries, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1978. (18.3)

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже приводится список обозначений, которые широко используются в данной книге. Список не претендует на полноту или завершенность. Как правило, каждый приведенный символ употребляется в книге более одного раза; однако в некоторых случаях определяющим фактором для внесения обозначения в список служила его важность, даже если оно встречается лишь однажды. Число после объяснения смысла каждого символа указывает номер раздела, где он впервые определен или использован. Если приведены два числа, то второе дает номер раздела, где обозначение используется особенно часто.

Латинские буквы

$\mathbf{a}$	$= (a_1, a_2, a_3)$. Идентифицирующие параметры в лагранжевом описании поведения сплошной среды	4.1
a	Постоянная давления излучения (постоянная плотности излучения), $a = 4\sigma/c$, где σ — постоянная Стефана — Больцмана	9.2б
a	Индекс для обозначения квазиадиабатической величины	10.1
a	Осцилляторный момент инерции	19.1б
ad	Индекс для обозначения адиабатической величины	4.2в
$\mathbf{A}$	$\equiv (1/\rho)\nabla\rho - (1/\Gamma_1 P)\nabla P$	17.1
A	Радиальная составляющая вектора $\mathbf{A}$; критерий конвективной устойчивости	17.1
A	Обозначение «акустической» области	17.10
$\mathbf{A}(\xi)$	$\equiv \xi$	19.1б
$A_{2\nu}$	Коэффициент в разложении A/r	17.6а
b	Величина, определенная выражением, аналогичным (19.6)	19.1б
$B(T)$	Интегральная функция Планка	4.3
B	$\equiv 3\Gamma_1 - 4$	13.1
$\mathbf{B}(\xi)$	$\equiv 2iM\xi$	19.1б
$B_{2\nu}$	Коэффициент в разложении Ag/r^2	17.6а
$B - V$	Показатель цвета	3.1
c	Скорость света в вакууме	2.4
c	Индекс, указывающий, что значение соответствующей величины относится к центру звезды	8.12а
c	Величина, определенная выражением, аналогичным (19.6)	19.1б

c_P	Удельная теплоемкость при постоянном давлении	4.2в
c_V	Удельная теплоемкость при постоянном объеме	4.2в
c_1	$\equiv (r/R)^3 M/m$	17.5б
C	«Интеграл работы»	9.1
C	Величина, определяющая расщепление частот вследствие вращения	19.1в
$\mathbf{C}(\xi)$	$\equiv M^2\xi + \overrightarrow{\mathscr{P}}(\xi) + \overrightarrow{\mathscr{V}}(\xi)$	19.1б
C_i	Мнимая часть интеграла работы	9.1
C_r	Вещественная часть интеграла работы	9.1
$C_{2\nu}$	Коэффициент в разложении величины $\rho/(\Gamma_1 P)$	17.6а
d	Верхний или нижний индекс, указывающий, что значение соответствующей величины выражено в сутках	2.1
$d\tau$	Элемент объема	4.2а
$\mathscr{D} M_i$	«Эффективная» масса i-й поверхности раздела при разбиении модели звезды на дискретные массовые зоны	8.12б
D	Постоянная, используемая в однозонной модели Бейкера	13.1
D	Интеграл, связанный с отсутствием теплового равновесия	19.4
D/Dt	Одно из обозначений субстанциональной производной	4.1
$D_{2\nu}$	Коэффициент в разложении величины ρ	17.6а
$\mathbf{e}_{1,2,3}$	Единичные базисные векторы в декартовой системе координат	4.2б
$\mathbf{e}_{r,\theta,\phi}$	Единичные базисные векторы в сферической системе координат	6.1
$\mathbf{e}_{\tilde{\omega},\phi,z}$	Единичные базисные векторы в цилиндрической системе координат	19.1в
E	Внутренняя энергия на единицу массы	4.2в
$\mathscr{E}$	$\equiv [(\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]_0$	17.14
E_{grav}	Полная гравитационная энергия	19.2
E_{rot}	Кинетическая энергия вращения	19.2
E_{mag}	Полная магнитная энергия	19.2
$E_{2\nu}$	Коэффициент в разложении величины $\rho g/(r\Gamma_1 P)$	17.6а
$\mathbf{f}$	Полная «объемная» сила на единицу массы	4.2б
f	Обозначение моды f или связанной с ней величины (иногда как индекс)	17.7
f_t	«Тангенциальная составляющая» произвольного вектора $\mathbf{f}$	17.3
$f(\mathbf{r}, t)$	Произвольная функция от $\mathbf{r}$ и t	4.1
$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$	Сила гравитации на единицу массы	4.5
$\mathbf{F}$	Полный векторный поток тепла вследствие всех механизмов переноса	4.3
F_ν	Поток, излучаемый в единичном интервале частот	3.3
$\mathbf{g}$	Ускорение силы тяжести	4.5

g	Абсолютное значение ускорения силы тяжести, $g = Gm(r)/r^2$	6.1
g_e	Эффективное ускорение силы тяжести	11.3
g	Обозначение моды g или связанной с ней величины (иногда как индекс)	17.7
$g(\omega)$	$\equiv f(\omega)/X_1(\omega)$	9.2б
G	Гравитационная постоянная	1
$G_{1,2}$	Линейные операторы	9.2б
$G1, G2$	Матрицы	9.2б
$G_{1,3}$	Интегралы, связанные с отсутствием теплового равновесия	19.4
$\boldsymbol{G}$	Обозначение «гравитационной» области	17.10
h	Удельная энтальпия, $h \equiv E + P/\rho$	11.3
h	Час	3.1
H	Напряженность магнитного поля	19.2
$\mathbb{I}$	Единичный тензор	4.2б
$\mathcal{I}$	Единичная матрица	8.12б
I	Момент инерции	8.8
I	Действие, $I \equiv \eta^2 \omega$	19.4
$\mathbf{j}_E$	Вектор потока энергии	4.2в
J	Число зон при разбиении модели на дискретные массовые зоны	8.12б
J_k	Осцилляторный момент инерции для k-й моды	8.8
$J(\mathbf{r}[\mathbf{a}, t])$	Якобиан, $J \equiv \lvert \partial x_j/\partial a_k \rvert$	4.2а
k	Коэффициент функции потемнения к краю $\phi(\theta)$	3.4
$\mathbf{k}$	Волновой вектор	5.5
k	Индекс, обозначающий k-ю моду (для радиальных колебаний $k = 0, 1, 2, \ldots$; для нерадиальных колебаний $k = 1, 2, \ldots$)	8.5
k_r	Радиальная составляющая вектора $\mathbf{k}$ (индекс r иногда отбрасывается)	8.4, 17.10
k_H	«Горизонтальная» составляющая вектора $\mathbf{k}$	18.2
k_T	Полное волновое число	18.2
$K_{1,2}$	Линейные операторы	9.2б
$K1, K2$	Матрицы	9.2б
K	Параметр неадиабатичности, используемый в однозонной модели Бейкера	13.1
K	Коэффициент «лучистой теплопроводности»	17.14
K	Коэффициент теплопроводности	18.2а
l	Степень сферической гармоники $Y_l^m(\theta, \phi)$	17.3
L	Светимость звезды	2.3
L_ν	Светимость в единичном интервале частот	3.3
$\mathcal{L}$	Линейный самосопряженный оператор, используемый в линейном адиабатическом волновом уравнении	8.8
L_r	Текущая светимость, $L_r \equiv 4\pi r^2 F$	6.1
L_1	Светимость на нижней границе зоны ионизации водорода	11.3
L_2	Светимость на верхней границе зоны ионизации водорода	11.3
L^2	Оператор Лежандра	17.3

m	Звездная велнчииа как единнца измерення (обычио верхиий нндекс)	3.1
m	Величииа, используемая в однозоиной модели Радда — Розеиберга [см. уравиеиие (13.28)], а также постояииая, используемая в модели Стеллиигверфа	13.2
m	Порядок (азимутальиый иидекс) сферической гармоиики	17.3
$m(r)$	Масса, заключеииая виутри сферы радиуса r (зависимость от r иногда в явиом виде ие указывается)	6.1
M	Масса звезды	
$\mathscr{M}$	Масса газа, содержащегося в осиовной зоне модели Радда — Розенберга	13.2
M	Оператор, $M \equiv \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$	19.1б
M_{bol}	Абсолютиая болометрическая звездная величнна	3.1
M_V	Абсолютиая визуальная звездиая велнчина	3.1
$\mathbf{n}$	Единнчиый вектор, направлеииый вдоль виешией нормалн к поверхности	4.2б
n	Показатель степеии при ρ в законе непрозрачиостн	7.5
n	Показатель степеии прн P в законе непрозрачиостн	11.3
n	Показатель политропы	8.12в
n	Иидекс для обозиачеиия порядка моды	17.7
n	$\equiv m\Gamma_1 - 2$	13.2
na	Иидекс для обозиачения иеадиабатической велнчнны	19.4
n_0	$\equiv r_0/r_c$	13.2
N	Частота Брунта — Вяйсяля	17.2
0	Иидекс для обозиачення иевозмущеииого или равиовесиого значеиия соответствующей величииы (часто опускается)	5.3
$O(\ldots)$	Обозиачеиие члеиов некоторого порядка	9.3, 19.1в
p	Поправочиый множитель к наблюдаемой лучевой скорости	3.3
p	Обозиачеиие моды p или связаниой с ией величииы (иногда как иидекс)	17.12
P	Полиое давление	2.1
$\mathbb{P}$	Теизор полиого давлеиия	4.2б
$\mathscr{P}$	Лииейиый векториый оператор	15.3
P_g	Газовое давлеиие	8.3
P_r	Давлеиие излучеиия	8.3
q	Теплосодержание иа едииицу массы	4.2в
q	Отиошеиие текущего зиачения массы к полиой массе звезды, $\equiv m/M$	8.12а
q	$\equiv \sigma/[4(n+1)]$	11.3
Q	Пульсациоииая постояииая	2.1
r	Радиальиая координата в сферической снстеме координат, отсчитываемая от центра звезды	2.1

$\mathbf{r}$	Вектор положения точки (радиус-вектор)	4.1
r	Индекс для обозначения радиальной составляющей	17.3
r_c	Радиус жесткого ядра звезды	13.2
R	Радиус звезды	2.1
R	Индекс для обозначения значения на поверхности	8.12в
R_S	Радиус Шварцшильда	1
Re	Вещественная часть комплексной величины, например Re (ζ)	8.2
s	Секунда	3
s	Удельная энтропия	5.4в
s	Показатель степени при T^{-1} в законе непрозрачности	7.5
s	Собственная частота	13.1
$\mathfrak{s}$	Комплексная угловая частота	13.1, 18.2
$\mathfrak{s}_0$	Частота $\mathfrak{s}$ в адиабатическом пределе	18.2а
sp	Индекс для обозначения пространственной части	9.1
S	Поверхность, ограничивающая заданный объем	4.2б
S_l	«Критическая акустическая частота»	17.10
$\mathscr{S}$	Величина, определенная выражением (18.15)	18.2а
t	Время	2.1
t'	$\equiv \omega_0 t$	13.4
$\tilde{t}$	$\equiv \varepsilon t$	13.4
t_{ff}	Время «свободного падения», или динамическое характерное время	2.2
t_K	Кельвиновское характерное время	2.3
t_{nuc}	«Ядерное» характерное время	2.4
t_s	Характерное время эволюции или «медленного» изменения «статической» модели звезды	19.4
T	Температура	4.1
$\mathscr{T}$	Полная кинетическая энергия	4.6
T_e	Эффективная температура	3.1
TR	Индекс, указывающий на то, что значение соответствующей величины относится к «переходной области»	10.1
$\mathbf{u}$	Произвольная «достаточно регулярная» векторная функция	15.2
u	Произвольная «достаточно регулярная» функция	8.8
u	$\equiv r^2\delta r$	17.5а
$\mathbf{u}_k$	k-я собственная функция оператора $\mathscr{L}$	15.2
$\mathbf{u}(\mathbf{r})$	Пространственная часть величины $\delta\mathbf{r}(\mathbf{r}, t)$	15.2
U	$\equiv d\ln m/d\ln r$	17.5б
U_ν	Коэффициент в разложении величины u	17.6а
$\mathbf{v}$	Скорость жидкости	4.1
v	$\equiv uP^{1/\Gamma_1} = r^2\delta rP^{1/\Gamma_1}$	17.9
v_s	Адиабатическая (лапласова) скорость звука	5.5
$\mathbf{v}_M$	Скорость в меридиональной плоскости	19.1в

v_{gr}	Групповая скорость	17.12
v_{ph}	Фазовая скорость	17.12
V	Объем звезды	2.3
V	Радиальная скорость движения звездной поверхности, $V = \dot{R}$	3.4
$V(t)$	Наблюдаемая лучевая скорость поверхности звезды	3.3
V	Удельный объем, $\equiv 1/\rho$	4.2а
$V_{\rightarrow}$	$\equiv -d \ln P/d \ln r$	8.12а
$\mathscr{V}$	Линейный векторный оператор	15.3
w	$\equiv y\rho P^{-1/\Gamma_1} = P'P^{-1/\Gamma_1}$	17.9
x	Декартова координата	4.1
$\mathbf{x}$	Вектор положения точки	4.5
x	$\equiv r_0/R_0$	7.3
$x_{1, 2, 3}$	Компоненты вектора $\mathbf{r}$ в декартовой системе координат	4.1
x_i	Доля по массе атомов i-го вида	5.2
X	Доля водорода по массе	18.2а
X_i	Матрица-столбец, используемая в связи с разбиением модели звезды на дискретные массовые зоны, $\equiv (\mathscr{D} M_i)^{1/2}\delta r_i$	8.12б
y	Декартова координата	4.1
y	$\equiv P'/\rho$	17.5а
y_1	$\equiv \delta r/r$	17.5б
y_2	$\equiv (gr)^{-1}(P'/\rho + \psi')$	17.5б
y_3	$\equiv (gr)^{-1}\psi'$	17.5б
y_4	$\equiv (1/g)d\psi'/dr$	17.5б
Y	Доля гелия по массе	10.3
$Y_l^m(\theta, \phi)$	Сферическая гармоника	17.3
Y_ν	Коэффициент в разложении y	17.6а
z	Декартова координата	4.1
Z	Доля по массе элементов тяжелее гелия	10.3

Греческие буквы

α	$\equiv \nabla \cdot \delta\mathbf{r}$	17.3
α	$\equiv (\partial \ln \varepsilon/\partial \ln X)_{\rho, T}$	18.2а
$\alpha(r)$	$\equiv (1/w)dv/dr$	17.10
β	Отношение газового давления к полному, $\equiv P_g/(P_g + P_r)$	8.3
$\beta(r)$	$\equiv (1/v)dw/dr$	17.10
γ	Отношение удельных теплоемкостей, $\equiv c_P/c_V$	4.2в
$\Gamma_{1, 2, 3}$	Показатели адиабаты	4.2в
δ	Лагранжева вариация, например $\delta\mathbf{r}$	5.3
δ	$\equiv \lvert C/J\Sigma^3 \rvert$	9.3
δ_{kl}	Символ Кронекера	8.8
δt	«Тангенциальная составляющая» вектора $\delta\mathbf{r}$	17.3
$\delta t_{\theta, \phi}$	Трансверсальные составляющие вектора $\delta\mathbf{r}$	17.3
$\delta\Phi$	«Эффективная потенциальная энергия» звезды в невозмущенном состоянии	8.11
$\delta\Psi$	Полная пульсационная (сумма кинетической и потенциальной) энергия звезды, $\equiv \delta\mathscr{T} = \delta\Phi$	9.1

Δ	Произвольное малое изменение, например Δu	8.10
$\Delta m(r)$	Масса вне поверхности радиуса r, $\equiv M - m(r)$	10.1
ε	Малое отвлеченное число	13.4
ε	Суммарная скорость генерации тепла на единицу массы от всех источников энергии (обычно источниками энергии служат термоядерные реакции)	4.3
ζ	Относительная лагранжева вариация величины r, $\equiv \delta r/r_0$	7.1
ζ	$\equiv \delta\mathbf{r}$	15.2
ζ	Величина, определяемая выражением (17.93б) и связанная с трансверсальной составляющей вектора $\delta\mathbf{r}$	17.11
ζ	Параметр неадиабатичности в модели Стеллингверфа	13.3
η	Инкремент нарастания амплитуды пульсаций	18.3
θ	Полярный угол в сферической системе координат	6.1
Θ	$\equiv L_0/(\sigma\chi\Delta m_0)$	11.3
$\varkappa$	Непрозрачность	7.5
$\varkappa$	Коэффициент устойчивости, $\lvert\varkappa\rvert \equiv 1/\tau_d$	9.1
$\varkappa_{\mathrm{I}}$	Коэффициент устойчивости для относительной вариации $\delta r/r$	19.4
$\varkappa_{\mathrm{II}}$	Коэффициент устойчивости для абсолютной вариации δr	19.4
$\varkappa_E$	Коэффициент устойчивости для полной пульсационной энергии	19.4
λ	Показатель степени при ρ в выражении для скорости генерации термоядерной энергии	7.6
λ	Длина волны возмущения, $= 2\pi/k$	2.1
λ_P	Локальная высота однородной атмосферы, $\equiv -dr/d\ln P$	7.3
Λ	$\equiv 4(\Gamma_3 - 1) + s(\Gamma_3 - 1) - n - 4/3$	13.1
Λ'	$\equiv 4(\Gamma_3 - 1) + s(\Gamma_3 - 1) - n - 4/m$	13.3
μ	Средняя молекулярная масса	17.2
ν	Показатель степени при T в выражении для скорости генерации термоядерной энергии	7.6
ν	Показатель политропы	17.8
ν_e	Эффективный показатель политропы	17.9
$\xi(r)$	Пространственная часть величины $\zeta(r, t)$	8.2
Π	Период пульсаций (индексы 0, 1, 2, . . . обычно обозначают соответственно основную моду, первый обертон, второй обертон и т.д.)	2.1
ρ	Плотность	2.1
ρ_c	Плотность в центре	8.12а
$\bar{\rho}(r)$	Средняя плотность шара радиуса r, $\equiv m(r)/(\frac{4}{3}\pi r^3)$	8.9
σ	Угловая частота пульсаций	2.1
σ'_{rot}	Поправка к частоте ω вследствие эффектов вращения (индекс «rot» иногда отбрасывается)	19.1в

Σ^2	Вещественное число, определенное соотношением (8.41)	8.10
Σ^2	Вещественное число, определенное соотношением (15.16)	19.2
$\phi(\theta)$	Функция потемнения к краю	3.4
ϕ	Азимутальный угол в сферической системе координат	6.1
ϕ	Фаза величины $(\delta L/L)_2$ относительно $(\delta L/L)_1$	11.3
ϕ	Фазовый угол	13.4
Φ	Полная гравитационная потенциальная энергия	4.6
χ	$\equiv P'/\rho + \psi'$	17.3
χ_T	$\equiv (\partial \ln P/\partial \ln T)_\rho$	4.2в
χ_μ	$\equiv (\partial \ln P/\partial \ln \mu)_{\rho, T}$	17.2
χ_ρ	$\equiv (\partial \ln P/\partial \ln \rho)_T$	4.2в
$\psi(\mathbf{r}, t)$	Гравитационный потенциал	4.5
Ψ	«Полная» энергия, $\equiv \mathscr{T} + U + \Phi$	4.6
Ψ	Полная энергия пульсаций $= \mathscr{T} + \delta\Phi$	8.11
Ψ_ν	Коэффициент в разложении величины ψ'	17.6а
$\underset{\sim}{\omega}$	Угловая частота пульсаций	8.12б
$\tilde{\omega}$	Расстояние от оси вращения (в цилиндрических координатах)	19.1а
$\omega_{1, 2, 3}$	Решения уравнения $i\omega(\omega^2 - \Sigma^2) = C/J$	9.3
Ω	Гравитационная потенциальная энергия звезды	2.3
Ω	Безразмерная угловая частота, $\equiv \sigma^2 R^3/GM$	8.6
Ω	Угловая скорость вращения	19.1а

Прочие символы и обозначения

· (точка)	Производная по времени (субстанциональная), например $\dot{r}$	2.1, 4.2а
¯ (черта)	Среднее значение, например $\bar{\rho}$	2.1
$\odot$	Значение для Солнца, например $\rho_\odot$	2.1
$\langle \ldots \rangle$ (угловые скобки)	Среднее значение, например $\langle \rho \rangle$	3.1
∇ (набла)	Оператор градиента	4.1
: (двоеточие)	Двойное скалярное произведение в тензорной алгебре, например $\mathbb{P}:(\nabla \mathbf{v})$	4.2в
∇^2 (набла-квадрат)	Оператор Лапласа, $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$	4.5
$\lvert \ldots \rvert$	Абсолютная величина вектора, например $\lvert \mathbf{v} \rvert$	5.2
$\lvert \ldots \rvert$	Модуль	7.1
$\lvert \ldots \rvert$	Определитель матрицы	8.12б
′ (штрих)	Дифференцирование по x ($\equiv r_0/R_0$)	8.12а
′ (штрих)	Эйлерова вариация, например f'	5.3
δ	Лагранжева вариация, отклонение от равновесного значения, например δP	2.1
* (звездочка)	Комплексно сопряженная величина, например ξ^*	8.8
∇_x	Градиент в точке $\mathbf{x}$	15.1
∇	Логарифмический температурный градиент, $\equiv d \ln T/d \ln P$	17.2
∇_{ad}	$\equiv (\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2$	17.2
$\propto$	Знак пропорциональности	17.8

ОГЛАВЛЕНИЕ

III
Нерадиальные колебания звезд

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Джон П. Кокс

ТЕОРИЯ ЗВЕЗДНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Ст. иаучиый редактор М. Я. Рутковская
Художиик М. Г. Жуков
Художествеииый редактор М. Н. Кузьмниа

ИБ № 3231

Подписаио к печати 19.05.83. Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура таймс. Печать офсетиая. Объем 10,25 бум. л. Усл. печ. л. 20,50.
Усл. кр.-отт. 20,50. Уч.-нзд. л. 23,70. Изд. № 27/2130.
Тираж 2000 экз. Зак. 362 Цеиа 3 р. 80 к.

Набраио иа фотоиаборном комплексе в издательстве «Мир»,
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатаио в Тульской типографии Союзполиграфпрома
при Государствениом комнтете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжиой торговли
г. Тула, проспект им. В. И. Леиина, 109

ДЖ.П.КОКС Теория звездных пульсаций